SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR DE BOGOTA D.C.
Secretaría Educación

Colegios Públicos de excelencia para Bogotá

Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.

Luis Eduardo Garzón
ALCALDE MAYOR DE BOGOTA

Francisco Cajiao Restrepo
SECRETARIO DE EDUCACION DEL DISTRITO

Liliana Malambo Martínez
Subsecretaria de Planeación y Finanzas

Marina Ortiz Legarda
Subsecretaria Académica

Ángel Pérez Martínez
Subsecretario Administrativo

Gloria Mercedes Carrasco Ramírez
Directora de Evaluación y Acompañamiento

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Equipos de trabajo

Subsecretaria Académica
Marina Ortiz Legarda

Directora de Evaluación y Acompañamiento
Gloria Mercedes Carrasco Ramírez

Subdirector de Evaluación y Análisis
Edilberto Novoa Camargo

Equipo de profesionales
Subsecretaría Académica
Henry Charry Alvarez
Henry Figueredo Olarte
Janeth Escobar Castillo
Luz Claudia Gómez Murcia
Mabel Betancourt Mojica
Martha Ayala Jara
Vilma Gómez Pava

Coordinación editorial
Henry Figueredo Olarte

Fotografías
Archivo digital, Secretaría de Educación Distrital

Corrección de estilo
L. Mercedes Rengifo B.

Diagramación e Impresión
Imprenta Nacional de Colombia

ISBN: 978-958-8312-38-5
Distribución Gratuita

Grupo de investigación
Saberes y Escuela

Coordinador
Jorge Castaño García

Amparo Forero Sáenz
Alexandra Oicatá Ojeda
Faberth Diaz Celis
Luis Alexander Castro
Mery Aurora Poveda
Sara Melo Fontecha

Agradecimientos especiales por la lectura y comentarios al documento a:

Olga Lucía León
Doctora en Educación Matemática

Sandra Arévalo
Magister en Educación

Clara Emilse Rojas
Magister en Docencia de las Matemáticas

 Avenida El Dorado No. 66-63 Bogotá, D.C. Colombia
PBX: 3241000 Exts. 2140, 2149, 2211, 2141, 2142
www.sedbogota.edu.co www.redacademica.edu.co e-mail: enovoa@sedbogota.edu.co; jescobarc@sedbogota.edu.co; hfigueredo@sedbogota.edu.co.
Bogotá, D.C. noviembre de 2007

Maestros y maestras que participaron en los talleres de Pensamiento Matemático	
Nombre	**Colegio**
Álvaro Gómez Olaya	IED Brazuelos
Blanca Cecilia Niño	IED Brazuelos
Jenny Martín Arango	IED Brazuelos
Oliva Arciniegas	IED Brazuelos
Alirio Sánchez	IED Carlos Alberto Lleras Camargo
Haydé Herrera	IED Carlos Alberto Lleras Camargo
Jahel Bautista Sánchez	IED Carlos Alberto Lleras Camargo
María Inés López	IED Carlos Alberto Lleras Camargo
Olga Cecilia Merchán	IED Carlos Alberto Lleras Camargo
Ana ligia Ramírez Morales	IED Carlos Arturo Torres
Ana Rosa Palacios	IED Carlos Arturo Torres
Constanza Osorio Meléndez	IED Carlos Arturo Torres
Dora Emilse López	IED Carlos Arturo Torres
Luz Stella López	IED Carlos Arturo Torres
Luz Stella López Peláez	IED Carlos Arturo Torres
María Aracely García	IED Carlos Arturo Torres
María Mercedes Salamanca Rojas	IED Carlos Arturo Torres
Francy Alba Bello Alvarado	IED Escuela Nacional del Comercio
Patricia Cruz Barrera	IED Escuela Nacional del Comercio
Omar López	IED Fe y Alegria
Pilar Cuervo Romero	IED Fe y Alegria
Nidia Janeth Ordoñez	IED Garcés Navas
Doris Barrera	IED Gran Colombia
Elsy Gonzales	IED Gran Colombia
Libia Rodríguez Vásquez	IED Gran Colombia
Yamile Escobar Hurtado	IED Gran Colombia
Beatriz Espinosa	IED Magdalena Ortega
Cristina Moya Cáceres	IED Magdalena Ortega
Helena Prieto Neira	IED Magdalena Ortega
Martha Suescu	IED Magdalena Ortega
Luz Dary Riaño	IED Manuel del Socorro Rodríguez
Sandra Riaño	IED Manuel del Socorro Rodríguez
Sandra Riaño	IED Manuel del Socorro Rodríguez
Nestor Ávila	IED Mochuelo Alto
Gloria Peñales	IED Nestor Forero Alcalá
Liliana Charria	IED Nestor Forero Alcalá
María Eugenia Salcedo	IED Nestor Forero Alcalá
Martha Méndez	IED Nestor Forero Alcalá
Matilde Guzmán	IED Nestor Forero Alcalá
Rosalba Martínez Ruano	IED Nestor Forero Alcalá

Nombre	Colegio
Teresa María Gaitana	IED Nestor Forero Alcalá
Martha Cortés	IED Normal Superior Maria Montessori
Consuelo Solano	IED Rafael Bernal Jiménez
María Gómez	IED Rafael Bernal Jiménez
Nelsy Yolanda Virgüez	IED Rafael Bernal Jiménez
Yolanda Luna	IED Rafael Bernal Jiménez
Alfonso Sánchez	IED República de Colombia
Esperanza Ortiz	IED República de Colombia
Evidalia Molina Alfonso	IED República de Colombia
Flor Beltrán Cárdenas	IED República de Colombia
Hilda Almanza	IED República de Colombia
Luz Myriam Alfonso Ortiz	IED República de Colombia
Nelly Rocío Orduz	IED República de Colombia
Cecilia Sánchez	IED República Dominicana
Clara Inés Herrera	IED República Dominicana
Gladys Mclean	IED República Dominicana
Janeth Soveida Rojas	IED República Dominicana
Judith Riaño	IED República Dominicana
María Irene Valencia	IED República Dominicana
Yolanda Becerra Martínez	IED República Dominicana
Gladys Restrepo de Zabala	IED Villemar
Héctor Fabio Esquivel	IED Virrey José Solis
José Salvador Salamanca	IED Virrey José Solis
Luis Fernando Pava	IED Virrey José Solis
Raquel Amaya	IED Virrey José Solis
Blanca Lucia Suárez	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Carol Acosta	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Cielo Cobos	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Edilma Peraza	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Flor Alba Duran Olivares	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Javier Raúl Martínez	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Julio Núñez	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Lina Margarita Rivera	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Luís Alfredo Cardona	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Maria Liliana López	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Marisol Cubides	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Martha Calderón	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Martha Robayo	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Mónica Sánchez	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Nancy Chiguasuque	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Nidia Sánchez	IED Miguel de Cervantes Saavedra
Zulma Cifuentes	IED Miguel de Cervantes Saavedra

Nombre	Colegio
Adriana Prada	IED Pablo de Tarso
Amparo Hernández	IED Pablo de Tarso
Angel Alberto García	IED Pablo de Tarso
Arminda Sánchez	IED Pablo de Tarso
Claudia Valbuena	IED Pablo de Tarso
Esneda Gutiérrez	IED Pablo de Tarso
Flor María Herrera	IED Pablo de Tarso
Javier Guarnizo	IED Pablo de Tarso
Juan Rojas	IED Pablo de Tarso
Libia Hurtado	IED Pablo de Tarso
Luis Eduardo Quientero	IED Pablo de Tarso
Luz Dary Vásquez	IED Pablo de Tarso
Luz Marina Rodriguez	IED Pablo de Tarso
Marlén Páez	IED Pablo de Tarso
Martha Niño	IED Pablo de Tarso
Oscar Duarte	IED Pablo de Tarso
Sonia Montealegre	IED Pablo de Tarso
Wilsón Gómez	IED Pablo de Tarso
Yadira Reyes	IED Pablo de Tarso
Carmen Odilia Melo	IED Paulo VI
Catalina Contreras Cruz	IED Paulo VI
Lida Rocío Bonilla	IED Paulo VI
Luz Jenny Romero	IED Paulo VI
María Edid Alarcón	IED Paulo VI
Rosalinda Ruiz	IED Paulo VI
Sonia Aidé Molina	IED Paulo VI
Alba Marina Salazar	IED Policarpa Salavarrieta
Alcira Inés Garzón	IED Policarpa Salavarrieta
Blanca Lilia Pabón	IED Policarpa Salavarrieta
Erika Lozano	IED Policarpa Salavarrieta
Gloria Isabel Garzón	IED Policarpa Salavarrieta
Juan de Dios López	IED Policarpa Salavarrieta
Leyla Hernández	IED Policarpa Salavarrieta
Luis Cardoso	IED Policarpa Salavarrieta
Luz Stella López Marín	IED Policarpa Salavarrieta
Luz Stella Sánchez	IED Policarpa Salavarrieta
María del Carmen González	IED Policarpa Salavarrieta
María Elisa Molina	IED Policarpa Salavarrieta
María Elvira Rodríguez	IED Policarpa Salavarrieta
Martha Velásquez	IED Policarpa Salavarrieta
Nohora María Peña	IED Policarpa Salavarrieta
Rocío Mahecha	IED Policarpa Salavarrieta

Nombre	Colegio
Alirio Guerrero	IED San José
Andrei Álvarez	IED San José
Clara Peñuela	IED San José
Claudia Reyes	IED San José
Diana Mejía	IED San José
Dolly Quevedo	IED San José
Edgar Cárdenas	IED San José
Elvira Domínguez	IED San José
Elvira Quiroga	IED San José
Esperanza Fandiño	IED San José
Jairo Ortiz	IED San José
Maritza Martínez	IED San José
Marlén Granados	IED San José
Marlén Terán	IED San José
Natalia Henao	IED San José
Nidia Rodríguez	IED San José
Nubia Forero	IED San José
Pedro Farfán	IED San José
Sandra Zamora	IED San José
Stella Sánchez	IED San José
Yamile Gordo	IED San José

Tabla de contenido

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Presentación

"Es muy diciente el hecho de que la educación, que es la que tiende a comunicar los conocimientos, permanezca ciega ante lo que es el conocimiento humano, sus disposiciones, sus imperfecciones, sus dificultades, sus tendencias tanto al error como a la ilusión y no se preocupe en absoluto por hacer conocer lo que es conocer.

La supremacía de un conocimiento fragmentado según las disciplinas impide a menudo operar el vínculo entre las partes y las totalidades y debe dar paso a un modo de conocimiento capaz de aprehender los objetos en sus contextos, sus complejidades, sus conjuntos."

Edgar Morin

El desafío de la complejidad

Estas publicaciones sobre las Orientaciones Curriculares para los ciclos de educación inicial y básica que se entregan a los maestros y maestras de Bogotá y a la comunidad educativa en general, responden al firme propósito de la actual administración de la Secretaría de Educación Distrital de avanzar en la transformación de la escuela y la enseñanza, y hacen parte de la propuesta de Colegios Públicos de Excelencia.

Si hay algo complejo por su naturaleza, es el proceso de aprendizaje en los seres humanos. Todo el siglo XX se caracterizó por una intensa búsqueda de respuestas a este interrogante vital y tanto la biología como la psicología generaron luces que no puede ignorar el sistema educativo. El trabajo científico sobre la cognición humana lanza enormes desafíos a la pedagogía y pone grandes interrogantes sobre la forma como se ha concebido hasta ahora la organización escolar y el modo en que niños y niñas se acercan al conocimiento. Cada vez resulta menos convincente la organización de currículos centrados en conceptos disciplinares que se traducen en una multitud de asignaturas dispersas, en las cuales predomina el dominio de lenguajes específicos sobre la capacidad de interrogar desde la experiencia el mundo real, para pensarlo con la ayuda de las disciplinas. Se supone, equivocadamente, que responder correctamente cuestiones planteadas desde unas teorías generales equivale a haber aprendido, independientemente de si la pregunta o la respuesta interrogan de manera más profunda al individuo.

La Ley 115 de 1994 (Ley General de Educación), introdujo en su texto un concepto de áreas obligatorias, que posteriormente en el currículo escolar se traduce en trece o catorce asignaturas que debe "ver" el estudiante, situación que conduce a que los estudiantes no aprendan casi nada verdaderamente importante.

Por su parte el Ministerio de Educación Nacional abandonó hace más de una década los estudios curriculares, asumiendo que cada institución está en capacidad de abordar un tema de tanta complejidad. En cambio, ha propuesto como orientación un modelo de estándares y competencias que tiende a simplificar en extremo el proceso de enseñanza y verificación del aprendizaje por parte de los educadores. Un modelo como éste transforma la comprensión compleja de los fenómenos sociales, científicos, simbólicos y culturales, en un listado de habilidades independientes que cada maestro especializado debe asegurar que tengan sus estudiantes, pero, en cambio, queda relevado de la obligación de orientar la reflexión profunda de los fenómenos físicos, sociales y culturales que afectan la vida de cada individuo, de las comunidades y de la humanidad en su conjunto.

Frente a la responsabilidad del ser humano de enfrentar la complejidad de la vida, se propone la simplicidad de reducir el conocimiento infantil y juvenil a un conjunto limitado de competencias intelectuales, como si ellas, por sí mismas, tuvieran el poder de desencadenar la reflexión individual y colectiva y conducir a la expresión y la acción.

La Secretaría de Educación de Bogotá, ha centrado su plan sectorial en la transformación de la escuela y la enseñanza, buscando la excelencia en los colegios públicos, como condición esencial para garantizar de manera plena el derecho a la educación. Esto supone un conjunto de acciones concurrentes, que asumen la complejidad del fenómeno educativo: infraestructura, equipamiento, alimentación, salud, gratuidad, subsidios, transporte, ampliación de espacios de aprendizaje, evaluación, formación de educadores, derechos humanos, convivencia en la escuela… y, desde luego, renovación curricular.

Este desafío implica admitir y enfrentar el reto de la complejidad. En este horizonte el rol de los maestros y maestras es fundamental. Ellos y ellas deben ser asumidos como profesionales de primera línea, con capacidad de asumir plenamente la labor que la sociedad les ha encomendado en relación con la formación integral de las nuevas generaciones. Como profesionales que se desempeñan en el mundo de la ciencia y la cultura, merecen el respeto y la consideración de sus capacidades intelectuales que legitiman y dignifican su profesión. Por eso, se les ha propuesto la tarea de estudiar y discutir el desafío escolar con materiales que superan la simplicidad de cartillas y documentos con fórmulas elementales, invitándolos a trajinar con elaboraciones de alto nivel académico preparadas por grupos de profesionales vinculados con las mejores universidades de la ciudad.

A cambio de un currículo prediseñado por áreas, asignaturas y resultados de aprendizaje, se ha propuesto la discusión de campos de pensamiento complejo, que permiten ver la interrelación de perspectivas diversas cuando se aborda la reflexión sobre los fenómenos del mundo. Se trata de introducir una profunda ruptura epistemológica, que de prioridad al aprendizaje como proceso de reflexión permanente sobre la experiencia cognitiva, en vez de centrarse sobre la organización secuencial de información fragmentada por disciplinas con el fin de facilitar la enseñanza y la homogenización.

Los textos que aquí se presentan son el resultado de la reflexión propositiva sobre el currículo, entendido como la forma de acercar a los niños, las niñas y los jóvenes al conocimiento. No se trata de propuestas definitivas ni concluyentes; por el contrario, se presentan como propuestas potentes y provocadoras fruto de un debate serio entre maestros, maestras, equipos pedagógicos locales y grupos académicos para que aporten al trabajo pertinente en el aula escolar y a la transformación de la escuela. De esta forma, se supera también el concepto convencional de capacitación, que reproduce modelos de enseñanza-aprendizaje tradicionales, para avanzar hacia modelos de experimentación colectiva en las aulas. Ya no se trata de "enseñar" lo que dice el documento, sino de "aprender" que pasa si unas hipótesis son confrontadas con la realidad.

El reto de la complejidad, como puede verse, es esencial a la vida humana y, por tanto, a la educación como herramienta social para darle calificación y pleno sentido a la vida. En el horizonte de la complejidad no hay respuestas fáciles, no hay fórmulas definitivas, no hay certezas permanentes, no hay un orden indestructible. Por el contrario, vivir la complejidad implica saber moverse en la incertidumbre y la provisionalidad.

Este es el reto que proponemos a los maestros y maestras, convencidos de que quienes han hecho de la educación y la pedagogía su vida y su profesión, estarán dispuestos a recorrer nuevos caminos de exploración intelectual que puedan enriquecer su propia vida y la de sus estudiantes.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Orientaciones generales

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

1. Orientaciones generales

Pensar un currículo de matemáticas requiere plantearse preguntas de diferentes órdenes. Algunas, como las que sugiere el documento de Lineamientos Curriculares de Matemática, publicado por el MEN: ¿Qué son las matemáticas?, ¿en qué consiste la actividad matemática en la escuela?, ¿para qué y cómo se enseñan las matemáticas?, ¿qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?, ¿cómo se puede organizar el currículo de matemáticas?, ¿qué énfasis es necesario hacer?, ¿qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos?, otras más podrían agregarse ¿el conocimiento matemático es construido por los estudiantes?, si es así, ¿cómo es esta construcción?, ¿cómo promoverla en la escuela? Seguramente el lector o lectora estará de acuerdo en que estas preguntas no tienen respuestas fáciles, ni inmediatas y muchos menos concluyentes y únicas.

Los estudiosos en matemática y en educación matemática ofrecen respuestas distintas a estas preguntas, según sean los enfoques y perspectivas que asuman. Se comprende entonces la complejidad de la tarea y la necesidad de entenderla como un problema que no tiene soluciones inmediatas y consensos simplistas. Es el esfuerzo profesional, tanto individual como colectivo, especialmente continuado que abre el camino para lograr no soluciones sino aproximaciones cada vez más elaboradas.

Este documento resulta de una tentativa en esta dirección. En diciembre de 2006 se elaboró una primera propuesta de orientaciones curriculares para los ciclos de educación básica A y básica B. En este año se conformaron dos grupos de aproximadamente treinta y cinco maestros y maestras que enseñan matemáticas. Uno con profesores de los ciclos de básica A y básica B y el otro con docentes del primer ciclo. Con el primero se discutieron los planteamientos formulados en el documento y con el segundo los borradores para realizar una propuesta del primer ciclo. Esta es una propuesta ampliada, y enriquecida con los aportes de estos grupos y aunque es un excelente ejercicio, el trabajo no ha terminado, y será provechoso para la educación del Distrito entender que todavía requiere precisiones, revisiones y aportes tanto de educadores como de investigadores. El compromiso de los diferentes niveles del sistema educativo, especialmente de los entes administrativos del Distrito, es grande, para gestar las condiciones reales –en tiempos, formación e incentivos- que promuevan una discusión cada vez más fundamentada y comprometida en los colegios, las localidades y la ciudad. El compromiso de los maestros no es menor. No sólo porque hay que estudiar críticamente el documento, sino que es preciso enriquecerlo con un conocimiento basado en el esfuerzo permanente, donde los docentes cuestionen las prácticas de los alumnos y reflexionen sobre ellas soportados en las elaboraciones teóricas y las investigaciones.

Lo deseable es que este documento genere un proceso que eleve las discusiones, las investigaciones y las innovaciones a la altura de las cuestiones y desarrollos alcanzados en el país y en el mundo sobre educación matemática. Se trata de hacer del ejercicio de educadores una actuación profesional consciente, documentada y responsable, capaz de problematizar prácticas y de buscar caminos innovadores, que incidan de forma significativa en las múltiples dificultades existentes al tratar de promover el pensamiento matemático de los estudiantes. La calidad de la enseñanza no se elevará únicamente con la entrega de procedimientos y técnicas didácticas, o el ejercicio de acciones de control, sino con el mejoramiento de las condiciones de posibilidades de los maestros y alumnos, y el compromiso de los docentes de asumir el reto de complejizar sus comprensiones sobre la pedagogía y la didáctica.

A pesar de las limitaciones que se tengan que reconocer y que algunos sectores académicos se encargan de evidenciar, son innegables los avances que en el país se han logrado en términos de las formulaciones sobre educación matemática. El documento de lineamientos curriculares es una buena concreción de estos desarrollos. También son incuestionables los progresos en la conformación de organizaciones académicas de educadores matemáticos en las últimas décadas. Estos adelantos han posibilitado desarrollos importantes en materia de investigaciones e innovaciones pedagógicas.

Pero estos esfuerzos, en términos generales, aún no se reflejan en el aula con la amplitud y profundidad deseadas y necesarias. Sin embargo, esta situación es resultante de múltiples factores, y quizá convenga reconocer que todavía existen vacíos en materia de políticas, en el desarrollo de programas de formación docente inicial y en servicio, así como en la promoción de grupos de investigación e innovación que favorezcan la solidez de la comunidad matemática. Hay mucho camino por recorrer para transformar una enseñanza centrada en la transmisión, en la memorización mecánica de hechos matemáticos (definiciones, algoritmos o técnicas) presentados de forma segmentada, por una enseñanza que procura la comprensión genuina en la que niños y jóvenes se enfrentan a situaciones integradas, permitiéndoles construir significados propios de los hechos.

Si bien se aprecia el esfuerzo de muchos maestros por ofrecer a los estudiantes una matemática que resulte interesante y agradable, además de una enseñanza activa, lúdica y ligada a actividades cotidianas, en muchos casos las acciones que se adelantan se trivializan. El propósito de lograr que el aula se constituya en un espacio que funcione "*a la manera de una comunidad de pequeños matemáticos*", en la que los alumnos se dedican a "*hacer matemática*", cede lugar a la tradición. La enseñanza con frecuencia continúa no teniendo un sentido, pues los educandos son simples receptores de la información que entrega el profesor.

Este documento pone a consideración de los educadores matemáticos de Bogotá orientaciones a partir de las cuales se configura lo que se ha atrevido llamar el *campo del Pensamiento Matemático*.

Estas orientaciones asumen como punto de referencia la propuesta de la Secretaría de Educación sobre los *Colegios públicos de excelencia para Bogotá* (SED, 2006), así como los *Lineamientos Curriculares de Matemática* elaborados por el Ministerio de Educación (MEN, 98) y la versión de los estándares 2006 del MEN. Con relación a estos últimos, más que seguir la propuesta específica de la secuencia y distribución de estándares a lo largo de los niveles, se tuvo en cuenta la primera parte, en la que se define lo que allí se llama los cinco procesos de la actividad matemática y los pensamientos y subsistemas. El primero de estos referentes, el de *Colegios Públicos de Excelencia*, invita a considerar el aprendizaje de la matemática no como la simple acumulación fragmentada de información a lo largo de un año escolar, sino como un proceso que responde a dos criterios: El primero indica que el desarrollo del conocimiento matemático es una construcción continua que necesita de varios años para consolidar cambios importantes, mientras que el segundo destaca que este proceso requiere darse en experiencias de enseñanza que procuran un conocimiento más integrador, en el que se establezcan relaciones más estrechas entre los diferentes sistemas del conocimiento matemático y de éste con otras campos del saber. Con relación a los otros dos referentes, el de los lineamientos y estándares, ha de decirse que se aceptan su espíritu y enfoque, aunque el lector o lectora encontrará algunas diferencias en el momento de la concreción de la estructura curricular, en particular cuando se define lo que en el documento de lineamientos se reconoce como el eje de los procesos y en la relación que se establece entre pensamientos y sistemas matemáticos. En cuanto al primer punto, se reduce el número de procesos definidos por el MEN porque algunos de ellos se consideran estrategias y no procesos. Con relación al segundo punto, se busca romper la dicotomía entre *pensamientos* y *sistemas matemáticos*. Se habla de pensamiento como una unidad producto de dos procesos indisolubles, los desarrollos cognitivos del estudiante a lo largo de su desarrollo mental (intelectual) y la apropiación compresiva de las herramientas matemáticas que logra como fruto de la acción de la escuela y de la acción social general (se entiende que estas herramientas no son únicamente informaciones, definiciones y procedimientos que se aplican para resolver problemas sino instrumentos para pensar el mundo). Por eso en esta propuesta el lector no encontrará la acostumbrada diferencia que desde varios años se hace en el país entre pensamiento y sistema.

El documento contiene cinco capítulos. En el primero se realizan formulaciones generales sobre la naturaleza de la matemática y de la educación matemática y en el segundo, se formulan las orientaciones curriculares. Allí se hacen desarrollos amplios de los diferentes subcampos. Cada uno de los tres capítulos siguientes registra los desarrollos específicos para cada uno de los tres ciclos. En ellos se encontrarán orientaciones sobre el énfasis que se propone hacer y sugerencias para el trabajo en el aula de ese ciclo en los ejes. Un desarrollo más en detalle de los subcampos en cada ciclo, en el que se ofrezcan orientaciones sobre los énfasis convenientes, podrá ser parte de un desarrollo posterior.

Se agradece la participación entusiasta en la discusión de este material de los maestros y maestras de los colegios distritales que atendieron la invitación que realizó la Secretaría de Educación, así como los aportes valiosos que realizaron de forma sistemática durante la discusión de la primera versión. Como parte del interés por vincular a los docentes al desarrollo de esta propuesta de orientaciones curriculares, la SED organizó dos grupos de

trabajo: uno conformado por maestros del primer ciclo (de preescolar a segundo grado) y el otro con profesores y profesoras de los ciclos de educación básica A y B. A lo largo de cuatro talleres con cada grupo se presentaron las propuestas de orientaciones en los respectivos ciclos, se invitaron conferencistas que ofrecieron fundamentos conceptuales, los maestros discutieron las propuestas e hicieron aportes importantes. Dicho trabajo se tuvo en cuenta en la formulación de la versión que aquí se presenta.

1.1. Naturaleza del conocimiento matemático

Aproximar una respuesta sobre la naturaleza del conocimiento matemático y de los objetos que construye el cuerpo teórico de la matemática requiere entender cuál es el proceso de producción de este conocimiento. Precisamente en las líneas se plantean algunas ideas consideradas importantes para la formulación de algunas propuestas de orientaciones curriculares en el campo del pensamiento matemático.

1.1.1 El conocimiento matemático es una producción cultural

A partir de la segunda mitad del siglo pasado se hacen desplazamientos orientados a reconocer que el conocimiento matemático, así como cualquier otro conocimiento, es una producción social, histórica y cultural. A partir de los desarrollos de la filosofía, la sociología del conocimiento, la antropología y la epistemología sobre la naturaleza y el proceso de producción del conocimiento, particularmente del científico y más específicamente del matemático, hoy se reconoce (aunque se vivan profundos debates) que la matemática es una actividad humana y como tal pertenece a la cultura de los diferentes grupos humanos. De esto se desprenden dos consecuencias: una, que ese cuerpo teórico disciplinar que reconocido como "-La Matemática[1]", es una producción fruto de la historia humana y por lo tanto del encuentro –incluso conflictivo- de diferentes culturas.[2] Dos, existen diferentes producciones matemáticas que diversos grupos humanos han construido en su intento de explicarse el mundo y satisfacer sus necesidades vitales. Aunque estos conocimientos no posean el mismo carácter universal y no ofrezcan la misma solidez teórica alcanzada por lo que se denomina como la "Matemática Universal", tienen importancia en tanto que se constituyen en herramientas utilizadas por los miembros del grupo que las producen.

Hoy en día, puede parecer extraño que esta forma de ver la Matemática no haya sido evidente en el pasado. Sin embargo, las cosas no son tan simples como aparentan. No es tan sencillo ofrecer respuestas a preguntas como: ¿los objetos de la Matemática y la actividad matemática son de la misma naturaleza que los de otras ciencias, por ejemplo las ciencias físicas o las ciencias sociales?, ¿existe alguna diferencia, entre la naturaleza del número y la de la ley de gravedad?, ¿el proceso de construcción del conocimiento matemático es semejante al proceso de construcción del conocimiento físico? Es importante que el maestro reflexione profundamente y de forma documentada sobre estas preguntas. No como un mero ejercicio académico, sino para construir sus propias y

1 Siguiendo a Bishop, se escribirá Matemática en mayúscula para referirse al cuerpo disciplinar de la matemática. Y matemática en minúscula para ese conocimiento más local, producido por los grupos humanos específicos a los largo de su experiencia vital.

2 Hay trabajos desde diferentes perspectivas. Desde la filosofía, Lakatos (1976), Davis y Hersh (1980), y Tymoczko (1986). Desde la antropología y con trabajos más cercanos a la educación matemática, (1986). Bishop A, en sus estudios de "Enculturación Matemática" y D'Ambrosio U., en sus trabajos sobre Etnomatemática, Además los aportes de Brousseau (1986), Chevallard (1997), entre otros.

genuinas explicaciones, ya que las comprensiones que sobre ellas se tengan condicionan lo que se hace –o se deja de hacer- en el aula. Una forma será cómo el pedagogo proceda; por ejemplo, si piensa las figuras geométricas como objetos físicos (así como las fuerzas de los campos gravitacionales generadas por los cuerpos en razón de su masa) y otra si considera que éstas son construcciones que resultan de comparar las formas de las caras de los objetos tridimensionales que se pueden manipular en el mundo físico. En el primer caso orientará su acción como si la enseñanza debiera tratar de ayudar a los estudiantes a abstraer la forma de los objetos. En el segundo, buscará ir más allá de registros perceptivos, pretendiendo que los estudiantes construyan relaciones entre los elementos que determinan esas formas y que establezcan relaciones entre ellas.

1.1.2. El conocimiento matemático no es un cuerpo teórico de verdades infalibles y objetivas

Independientemente de la discusión filosófica sobre si los objetos últimos de la Matemática como disciplina se ocupan de universales que transcienden las particularidades de la cultura y el tiempo, los trabajos referidos proponen que ésta se deje de percibir como un cuerpo de verdades infalibles y objetivas y que por el contrario, se piense que es cambiante y falible, como cualquier otro conocimiento producto de la invención humana. Este hecho no se limita a los confines de la epistemología de la matemática; también tiene que ver con la enseñanza. Paul Ernest (1991), dice:

Si es reconocido que la matemática es una construcción falible y social, entonces es un proceso de indagación y acercamiento al conocer, un campo de creación e invención expandiéndose continuamente, no un producto terminado. Un panorama tal de la matemática tiene poderosas consecuencias educativas. **Los fines de la enseñanza de la matemática requieren incluir la facultad de los aprendices para crear su propio conocimiento matemático; la matemática puede ser reformada,**[3] al menos en la escuela, para permitir a más grupos acceder a sus conceptos, y a la riqueza y el poder que su conocimiento conlleva; el contexto social y los usos y prácticas de la matemática pueden ya no ser legítimamente dejadas de lado, los valores implícitos de la matemática requieren ser encarados. Cuando la matemática es vista de esta manera necesita ser estudiada en los contextos vivos los cuales son significativos y relevantes para los aprendices, incluyendo sus lenguajes, culturas y vivencias cotidianas, tanto como sus experiencias de referencia escolar.

1.1.3. Los procesos de producción y de presentación del conocimiento matemático son distintos

El proceso de construcción del conocimiento matemático, como el de cualquier otro conocimiento, es distinto del que se sigue para su presentación. Incluso podría decirse que se dan en direcciones opuestas. Mientras el proceso de producción de conocimiento matemático se parece más a ensayos poco rigurosos y poco sistemáticos, más similares a un acto de creación que a un proceso de cadenas deductivas como aparece en los libros, el proceso de presentación ante las comunidades de pares como un proceso sistemático y coherente, en este caso, regido exclusivamente por el razonamiento deductivo. Los titubeos del proceso

3 Con Chevallard (1991), se puede decir que necesariamente es transformada, reformulada (aunque se hagan inconscientemente) como fruto de la transposición didáctica.

de creación se ocultan, lamentablemente en los manuales universitarios usados en la formación académica de los futuros educadores matemáticos y en muchos de los que se utilizan con los niños y jóvenes, el conocimiento matemático aparece como si fuera un producto acabado, hecho que hace que los aprendices se formen una idea inadecuada del verdadero proceso de construcción del conocimiento matemático. Brousseau (1986), comenta:

> Antes de comunicar lo que piensa que ha encontrado, un investigador tiene que determinarlo: no es fácil distinguir, en el laberinto de las reflexiones, cuáles son susceptibles de convertirse en un saber nuevo, e interesante para los otros; las demostraciones obtenidas, pocas veces coinciden con las conjeturas previas; hay que proponerse toda una reorganización de los conocimientos más próximos, anteriores o nuevos.
>
> También es necesario suprimir todas las reflexiones inútiles, la huella de los errores cometidos y los caminos erráticos... .

Cuando se enseña matemáticas o cualquier otro campo del saber, no sólo se acerca a los estudiantes a unos conocimientos, sino también a visiones sobre cómo se construye ese conocimiento, sus métodos, y sus formas de validación. En ese sentido, se les está ayudando también a construir ideas, que harán parte de lo que muestran en sus actitudes al estudiar y aprender matemática. El que los estudiantes asuman el papel de simples receptores y/o memorizadores, el que exhiban poca capacidad argumentativa, el que muchas veces se resistan y se consideren incapaces de enfrentar lo nuevo a partir de sus propias comprensiones, es fruto, en gran medida, de la forma como se les enseña la matemática.

1.1.4. Lo universal y lo particular en la producción del conocimiento matemático

Algunos autores y educadores matemáticos creen encontrar en el derrumbe de las ideas de infabilidad y de universalidad de la Matemática, la negación de cualquier posibilidad de encontrar invariantes y regularidades en el proceso de producción del conocimiento, por lo cual asumen un nuevo absolutismo, toda construcción matemática es "absolutamente relativa". Sin embargo, autores como Bishop (1999) reconocen una Matemática universal y admiten la universalidad en lo que podría reconocerse como unas matemáticas académicas, a pesar de identificar prácticas matemáticas elementales que son utilizadas en diferentes grupos culturales. Bishop, no sólo reconoce una matemática "erudita", o "universal", sino además unas actividades matemáticas universales que están presentes en todos los grupos humanos al buscar la satisfacción de sus necesidades básicas. Muestra la existencia de seis actividades matemáticas que todos los grupos humanos realizan y a partir de las cuales han construido sus propios conocimientos en su mundo de experiencias vitales. Estas actividades son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Sobre la relación entre lo universal y lo particular este autor dice:

> He argumentado la propuesta de que existen seis actividades "universales" esenciales que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas en la cultura. También he mostrado que todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de la matemática, como respuesta a las "demandas" del entorno, experimentadas a través de estas actividades. Sin embargo, como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre

culturas diferentes, ha aparecido una línea de desarrollo concreta e inidentificable. Esto ha dado lugar a las Matemáticas, la disciplina internacionalizada que conocemos hoy, una versión muy potente de las matemáticas en la cultura.

Estas consideraciones son importantes para la enseñanza, ya que en un sentido llaman la atención sobre la necesidad de reconocer los saberes propios de los estudiantes como miembros del grupo en el que se inscribe su existencia y, en otro sentido complementario que es la de enriquecer estos saberes con la apropiación comprensiva del conocimiento de la matemática académica. Es ilustrativo el hecho paradójico observado por el profesor de sectores populares con aquellos niños que en la calle se muestran hábiles para hacer cuentas y fracasan en la aritmética de la escuela. Este hecho llama la atención sobre la necesidad de rescatar, en el aula, las producciones no formalizadas, no académicas, es decir, cómo estos niños hacen cuentas para que el maestro pueda conocerlas, descubrir los significados del número sobre las que descansan y en esa medida contribuirles a sistematizarlas, promoviendo en ellos la producción de escrituras que interpreten los significados alcanzados. Es por eso que el maestro debe ayudarles a complejizar sus comprensiones del sistema de escritura y lectura de los números, con el fin de promover el tránsito a los algoritmos formales. En otras palabras, el hecho de destacar la importancia de los conocimientos locales no excluye la responsabilidad que tiene la escuela de acercar a los estudiantes al conocimiento matemático universal.

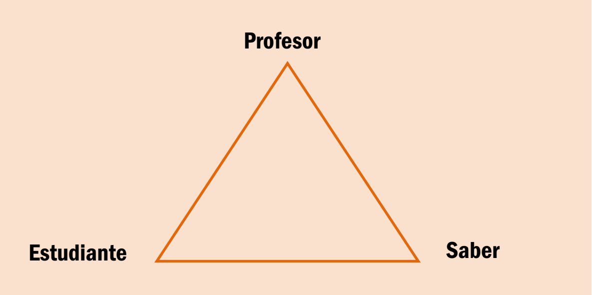
1.2. Naturaleza de la educación matemática

Un análisis de ese espacio de la práctica social que se puede incluir bajo el nombre de Educación matemática, engloba una amplia gama de hechos en órdenes diferentes. Va desde los fines que una sociedad se fija como deseables de alcanzar por sus niños y jóvenes después de un proceso de formación, los programas y políticas que se implementan y los controles que se ejercen; pasa por el estudio de las formas como se transfieren los conocimientos de la disciplina a la situaciones de enseñanza en el aula (programas de formación de los futuros maestros y de maestros en servicio, la producción de materiales de divulgación del conocimiento disciplinar dirigidos a estudiantes y a quienes están vinculados a enseñanza) y llega a las concreciones que se hacen en las instituciones escolares (las formas de planear, de evaluar, los periodos académicos que se organizan, los controles que se hacen, la intensidad y periodicidad de los horarios, las expectativas de los padres de familia) y las de aula (las experiencias que se desarrollan, cómo se desarrollan, los apoyos que se ofrecen a los estudiantes, las formas de comunicación que se establecen entre los alumnos y entre el profesor y los educandos, en general como se da el mundo de interacciones en el aula, las concepciones que tiene el maestro de lo que enseña y para qué lo enseña, al igual la de los estudiantes sobre ese objeto que aprenden, de cómo deben aprenderlo y para qué deben aprenderlo, las actitudes e intereses como aprendices). El espectro de análisis de ese espacio de la práctica social denominado educación matemática es bastante amplio, incluye lo que según D´Amore (2006) Godino y Batanero (1998) proponen llamar como Educación Matemática, es decir lo relativo a la teoría, desarrollo y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y la investigación cuyo objetivo es "identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y aprendizaje de la matemática"; para efectos de este documento en lo que sigue se hacen algunas consideraciones más circunscritas a los niveles de la institución escolar y del aula, es decir más cercanas a lo que es propio de la didáctica.

Brousseau (1986) menciona que "la didáctica de las matemáticas estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas". Un poco más adelante el mismo autor precisa que se refieren a los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también a los tipos de situaciones puestas en juego para enseñarles y sobre todo a los fenómenos a los cuales da lugar la comunicación del saber. Por su parte Sierpinska y Lerman (1996) destacan que "la didáctica matemática no sólo trata de los contenidos matemáticos que se enseñan, sino que también tienen que ver con los procesos inherentes en las prácticas de enseñanza-aprendizaje, los procesos cognitivos de los niños y las comprensiones de los profesores, todo inmerso en ambientes escolares".

1.2.1. La tríada didáctica componente activo de la actividad matemática

Son Chevallard y Joshua, (1982) quienes instauran el uso del triángulo maestro, estudiante y saber como herramienta para analizar los fenómenos presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.



El saber que se presenta al estudiante no es el saber "sabio" o el saber "erudito", el saber que llega al aula es transformado para hacerlo apto para la enseñanza El vértice del profesor se refiere al conjunto de todo lo que actúa sobre el alumno y sobre lo que él actúa; está relacionado con la actividad que hace en el aula cuando interactúa con los otros y con el saber. El vértice del estudiante está relacionado con el conjunto de acciones que realiza para transponer el aprendizaje, para crear situaciones didácticas y acompañar al estudiante en la construcción de sus propias construcciones. Cada uno de los lados de este triángulo constituye subsistemas que es necesario estudiar en detalle para dar cuenta de este gran sistema didáctico.

La relación pedagógica además de estar mediada por el saber, ante todo es una relación entre personas, allí están presentes expectativas, intereses, motivaciones, creencias y roles institucionales de maestros y alumnos. Las interacciones sociales de los actores en el aula construyen allí una organización social en la que se dan liderazgos y se establecen relaciones de poder. Estos elementos también hacen parte del análisis del sistema didáctico. Estas especificidades hacen que cada experiencia didáctica sea única, razón por la que no existe una transferencia de experiencia didáctica como un simple traspaso, más bien existe la posibilidad de reconstrucción.

1.2.2. Potenciar el pensamiento matemático, propósito fundamental del quehacer en el aula

El papel del maestro al enseñar es el de potenciar el desarrollo (o construcción) del pensamiento matemático de los estudiantes. Algunos autores preferirían no hablar de enseñanza, porque entienden este término como simple transmisión, como entrega de conocimientos que el estudiante debe memorizar. Otros quisieran no utilizar expresiones como desarrollo o construcción porque para ellos la primera expresión la entienden como un proceso resultado de la maduración fisiológica y la segunda como si este proceso fuera únicamente responsabilidad del estudiante, por lo que consideran que se niega la posibilidad de intervención pedagógica. Se propone mantener el término de enseñanza para insistir en la acción de orientar, dirigir, señalar que tiene quien enseña. Estas acciones son contrarias a la de transmitir información. En lugar de entender la palabra desarrollo como el despliegue de un proceso de maduración, se puede entender como el proceso complejo resultante de múltiples factores, uno de ellos tiene que ver con el proceso de desarrollo fruto del complejo sistema de interrelaciones entre lo fisiológico y el medio físico, social y cultural; pero además de éste, está el de las construcciones de los estudiantes fruto de sus experiencias con el mundo natural, social y cultural, incluidas las experiencias extraescolares y las escolares. El saber (entendido como saber genuino) que construye el alumno no es fruto exclusivo de la acción escolar, es más bien el resultado de la interacción de las construcciones propias de los educandos al intentar comprender y darle sentido a cada una de sus experiencias, entre ellas lo que se enseña en la escuela. Esta forma de ver, puede ayudar a entender la enseñanza más allá de intentar transmitir un conocimiento, no obliga a entender como lo sugiere Confrey (1990, citado por Sierpinska y Lermans, 1996), que una nueva didáctica consiste en que el profesor reconozca que él les está enseñando a sus estudiantes cómo desarrollar su cognición y que no está enseñando a los alumnos sobre matemáticas.

¿Cómo potenciar el pensamiento matemático del estudiante? Diseñando experiencias para que se involucre en actividades que lo pongan en el papel de hacer matemática. Estas experiencias son vivencias en las que los educandos se apropian de un problema que tienen que resolver, por lo que logran llenarlo de sentido y movilizan sus propios conocimientos para configurar posibles caminos de solución. Estas experiencias son invitaciones a pensar, a dialogar, a debatir, a la búsqueda colectiva.

Para elaborar este tipo de experiencias Brousseau sugiere que los maestros realicen un estudio epistémico e histórico de los conceptos a enseñar. Entre más claro sea para el docente el significado del concepto en el sistema teórico de la matemática, las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto; el estudio de la psicogénesis del concepto y un análisis didáctico (Guzmán 1989), mayores son las posibilidades que puede ofrecer a sus estudiantes, tanto por el diseño de las experiencias didácticas como por la interpretación de lo que hacen sus alumnos y del tipo de interpelaciones que conviene hacer.

Las situaciones o experiencias didácticas se caracterizan porque el estudiante se enfrenta a situaciones en las que se apropia de un problema; en la búsqueda de caminos de solución, unas veces entre los alumnos sin la intervención directa del profesor y otras, entre los educandos y el profesor, se comunican y negocian las tentativas de solución. Las intervenciones del docente están orientadas a ayudar a enriquecer las discusiones, a tener en cuenta posiciones contrarias, a requerir intentos de validación, a precisar y ampliar conclusiones.

1.2.3. La transposición didáctica

Como ya se dijo el saber "sabio", o el saber de la disciplina matemática se transforma para adaptarlo en conocimiento para ser enseñado. Este proceso es uno de los eslabones de la sucesión de cambios que el saber disciplinar sufre antes de llegar al aula descrito por Chevallard. Éste se inicia en el mismo acto de creación del conocimiento disciplinar, ya que el matemático, al presentar sus construcciones a la comunidad matemática lo "limpia" de los errores, obstáculos y de posibles fracasos que enfrentó en su etapa de construcción, como también del contexto específico que promovió sus reflexiones. Este nuevo conocimiento se formaliza, despersonaliza, descontextualiza, se abre a la generalización, a aplicaciones diferentes. "El proceso de transposición didáctica comienza cuando el matemático se dispone a comunicar sus resultados a sus colegas matemáticos" (Chevallard, 1991).

Después de que este conocimiento hace parte del cuerpo disciplinar, comienza una nueva etapa de cambio. Las personas encargadas del diseño curricular justifican la inserción de este nuevo conocimiento en los currículos, ofrecen directivas sobre el papel que éste debe jugar. Las diferentes instancias que median estas innovaciones hasta llegar al profesor (formación de maestros, editoriales). Una última etapa que se presenta se da cuando el profesor genera una nueva transformación del saber para presentarlo a los estudiantes y ellos en el esfuerzo de comprender y aprender,[4] generan significados propios, el proceso de enseñar debe velar porque cada vez sean más próximos a los significados de la disciplina. Como se reconoce, el acto de la transposición didáctica está ligado por la institucionalidad.[5]

Este proceso prolongado de transposición didáctica muestra la diferencia entre la matemática como disciplina y la matemática escolar. Reconocer el carácter necesario de este proceso de transposición es importante en el momento del diseño de las experiencias de enseñanza ya que pone al descubierto no sólo la imposibilidad de llevar a la enseñanza el conocimiento disciplinar tal cual está reconocido por la comunidad matemática, sino la necesidad objetiva de la educación como negociación de significados. La negociación de significados no es tanto el deseo loable producto de los mayores ideales democráticos, sino un acto inherente a la comunicación humana, de ahí que la enseñanza debe esforzarse en potenciarla.

1.3. Caracterización del campo de Pensamiento Matemático

Siguiendo a Piaget y a Vergnaud podría afirmarse que el campo del Pensamiento Matemático se ocupa del desarrollo de esa dimensión lógico-matemática, entendida como la capacidad de establecer relaciones y de operar con éstas. Esta capacidad no surge únicamente de las potencialidades cognitivas de los sujetos, adquiridas como miembros de la especie humana, ni tampoco se dan exclusivamente en el desarrollo de un sujeto en su interacción con el medio físico.

4 Según Chevallard y Joshua (1982), el aprendiz tiene que hacer el resultado como propio, creando una camino personal para su comprensión y encarnándolo en el contexto de los problemas en los está trabajando actualmente.

5 Según Sierpiska y Lerman (1996) afirma que Chevallard considera que todo conocimiento es conocimiento de una institución. La investigación profesional en matemáticas es una institución, la escuela otra, la familia otra. Las matemáticas también 'viven' en la industria y los negocios. Pueden vivir en cada una de estas instituciones, pero, por medio de adaptación, se convierten en una matemática diferente. Los estudios epistemológicos de las matemáticas deberían investigar las fuentes, modos de control, y mecanismos de crecimiento de las matemáticas en todos los 'nichos ecológicos' en que viven.

En su surgimiento también están involucrados los significados que va construyendo en el esfuerzo de apropiarse de las herramientas simbólicas producidas por la cultura, que en nuestro caso se relaciona directamente con el conocimiento matemático escolar.

Podría afirmarse entonces que este campo tiene que ver con ayudar a los niños y jóvenes a construir y apropiarse (comprensivamente) de las herramientas simbólicas y tecnológicas de la matemática escolar, que los haga sujetos cada vez más capaces de establecer relaciones y operar con éstas en diferentes situaciones y contextos, para conocer y actuar creativa y críticamente como ciudadanos.

Esta forma de pensar el campo del Pensamiento Matemático tiene una gran incidencia en términos de: integrar diferentes procesos presentes en el pensamiento matemático escolar y no escolar, integrar los diferentes subcampos que componen el conocimiento matemático y establecer relaciones con otros campos del conocimiento humano. En otras palabras, permite ver el campo no como un espacio en el que se estudian exclusivamente contenidos sino en el que se desarrolla el pensamiento.

1.3.1. El carácter operatorio del pensamiento

Piaget distingue dos dimensiones del pensamiento una física y otra lógico-matemática:

> Existen dos formas de experiencia: la física, consistente en actuar sobre los objetos para obtener un conocimiento por abstracción a partir de estos objetos mismos y la experiencia lógico-matemática, en la que se actúa sobre los objetos pero por abstracción de conocimientos a partir de la acción y no ya más de los propios objetos (Piaget, 1972).

En su oposición a una concepción empirista del conocimiento, afirma que "no descubrimos las propiedades del objeto si no agregamos alguna cosa a la percepción" y que lo que agregamos es un conjunto de cuadros lógico-matemáticos que son los únicos que posibilitan las lecturas perceptivas. Para este autor la experiencia no es accesible jamás sino por intermedio de los cuadros lógico-matemáticos.

Gardner (1994) retoma esta postura al definir lo que él distingue como inteligencia lógico-matemática:

> Los orígenes de esta forma de pensamiento se pueden encontrar en una confrontación con el mundo de los objetos (en su ordenación y reordenación y en la evaluación de la cantidad), el individuo se vuelve más capaz para apreciar las acciones que uno puede efectuar sobre los objetos, las relaciones que se obtienen entre estas acciones, las declaraciones (o proposiciones) que uno puede hacer respecto de las acciones reales o potenciales y las relaciones entre estos enunciados.

No es conveniente descartar la tesis de Piaget al identificar en la actividad de pensar de los sujetos una **dimensión operatoria** asociada a una capacidad de establecer relaciones y ejecutar operaciones al enfrentarse a la resolución de problemas de diversa naturaleza, aunque los debates actuales en este campo evidencian la poca capacidad explicativa que tiene el estructuralismo genético para dar cuenta de la actividad intelectual de los sujetos, al presuponer la existencia de unas estructuras cognitivas que evolucionan a lo largo del proceso de desarrollo de estos, pasando por ciertas etapas que se encargarían de determinar la totalidad o parte de su actividad intelectual. La investigación cognitiva actual insiste en reconocer que la capacidad operatoria del sujeto siempre está condicionada por los contenidos del pensamiento con los que éste opera. Además, que estas capacidades operatorias son construidas por sujetos inscritos en contextos culturales y están soportadas o mediadas por las herramientas simbólicas que han producido los grupos humanos a lo largo de su historia. Sin embargo, parece conveniente mantener dos tesis fundamentales de la explicación que ofrece el estructuralismo genético de Piaget y son: El pensamiento es operatorio y esta dimensión está presente cuando el sujeto intenta darle significado a la información que recibe del mundo exterior y existe cierto carácter universal de algunas formas como los sujetos organizan (operan) la información. Con el desarrollo de los estudios cognitivos completaremos diciendo que la universalidad está determinada en el interjuego que el sujeto establece en sus experiencias con el mundo físico y con las herramientas simbólicas propias de la cultura en la que está inscrito.

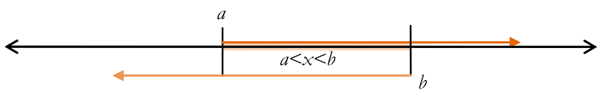
A continuación se ilustra mediante un ejemplo lo que significa aceptar el carácter operatorio del pensamiento y las implicaciones en el plano de la educación matemática y las relaciones entre los contenidos que se enseñan.

El orden está presente en los diferentes sistemas del conocimiento matemático escolar. Aunque en muchas prácticas de enseñanza el número y la medida se abordan como dos procesos no sólo distintos sino independientes, desde el punto de vista de la organización de los conocimientos de la matemática escolar y de los procesos cognitivos involucrados, encontramos que sus conexiones son profundas. Lo más inmediato es reconocer que el número está en la medida, en tanto que allí tenemos que contar como cuando decimos "ese palo mide 45 cm". Nos podemos imaginar que esta expresión puede significar que a lo largo de ese palo se coloca, una tras otra 45 veces la unidad centímetro, hasta recubrirla en su totalidad. Pero esta no es la única, ni la más importante relación que podemos establecer entre estos dos sistemas.

Ambos, el número y la medida, surgen de la necesidad de cuantificar la extensión, que para el primer caso corresponde a una colección y para el segundo a una magnitud. Al comparar dos números o dos medidas se puede decir una de las tres cosas siguientes: "*a* es más que *b*", "*a* es menos que *b*" o, "*a* es igual a *b*". Para que el estudiante esté en capacidad de dominar lo relativo al número y a la medida, no basta con que sea capaz de establecer estas relaciones; lo más importante es construir la capacidad de operar con ellas.

Esta capacidad operatoria supone por una parte la composición de la relación directa con la inversa. En el número se dirán cosas como: "La colección *A* tiene más elementos que la colección *B,* pero menos que *C"*. En lo referente a la medida se podrán decir cosas como: "En la vasija *A* cabe menos líquido que en la vasija *B,* pero más que en *C*". Expresiones que podrán ser comprendidas en tanto se tenga la capacidad de coordinarlas y representarse mentalmente que en ambos casos "*A* está entre *B* y *C*". Este ejemplo elemental, al que generalmente puede enfrentarse un niño de corta edad, puede verse de forma más compleja de la siguiente manera: En una situación en la que ya no se trata de una colección *A* particular, sino de un conjunto de colecciones *A* que superan en la cantidad de elementos a *B*, a la vez que es superada por la cantidad de la colección *C*. Por ejemplo, cuando se presenta un gráfico en el que se representa la cantidad de gasolina consumida por un automóvil según el kilometraje recorrido y se obtiene esta información: el consumo C (en galones) es $5<C<10$, para los kilómetros recorridos *R* es $140<R<280$. Estos enunciados abstractos no podrán comprenderse y menos se podrán poner en relación si no se está en capacidad de componer las relaciones "mayor" y "menor".

En general, todas aquellas situaciones que lleven al manejo de conjuntos acotados inferior y superiormente, requieren esa capacidad del pensamiento de operar con la relación inversa y la directa. Esto es lo que reconoce el profesor de undécimo cuando enseña intervalos en los reales $x>a$ y $x<b$, representándolos como $a< x<b$ o $b> x> a$ o de forma gráfica sobre la recta numérica como:



Adicionalmente a la capacidad de componer las relaciones inversa y directa, por otra parte, supone manejar la transitividad. La transitividad desde el punto de vista cognitivo no es otra cosa que la capacidad de comparar dos elementos A y B de forma indirecta, a través de las comparaciones de éstos con un tercero C. Por ejemplo, cuando se dice que "en la caja A hay más objetos que en C y en C hay más que B"; de ahí se infiere que necesariamente en A hay más que B[6]. Obsérvese que estos enunciados son reproducibles en el caso de las medidas de cualquier magnitud (longitud, capacidad, peso, etc.).

Este ejemplo del manejo del orden en el número y la medida, ilustra que efectivamente la compresión de diferentes sistemas conceptuales correspondientes a subcampos diferentes del conocimiento matemático, hace demandas lógicas comunes. Desconocer este hecho limita al profesor para ofrecer apoyos más adecuados a sus estudiantes, lo que hace que muchas veces se presenten los conceptos de estos sistemas de manera desarticulada, dejando en manos de los alumnos la tarea de integrarlos. Tarea que en muchos casos no se realiza.

Pero estas capacidades operatorias no sólo están presentes en los contenidos de la matemática, también están presentes en otros sistemas conceptúales Esquema como estos, en los que aparecen tres clases, una incluida en la otra, en cualquier sistema de clasificación, como las taxonomías de la zoología y la biología, o cualquier otro, se tendría un orden de inclusiones de clases de clases.

Esquemas como estos, en los que aparecen tres clases, una incluida en la otra, se pueden encontrar en muchos contenidos de la matemática y en contenidos externos a ésta. Por ejemplo en el subcampo de lo geométrico: si la clase *C* corresponde a la clase de los cuadriláteros, la *B* a la de los paralelogramos y la A a la de los rectángulos, entonces es correcto afirmar que *A* está incluido en *B*, que a su vez está incluido en *C*; de ahí que *A* esté también incluido en *C*. Otros ejemplos se pueden ilustrar desde cualquier taxonomía de la zoología o de la botánica.

Conviene insistir ahora en tres puntos para precisar la caracterización que se ha hecho del campo del Pensamiento Matemático:

- Las formas de operar con las relaciones establecidas entre los conceptos involucrados en los diferentes contenidos que se estudian en el campo de la matemática o en cualquier otro, no agotan todas las posibilidades y necesidades de comprensión. Cuando los estudiantes tratan de comprender los sistemas de conceptos que se les enseñan, no se limitan a operar con estos conceptos, sino que además establecen relaciones o vinculaciones de tipo experiencial. Esto es como decir que un niño no resuelve un problema como *"Daniel se quedó con 7 canicas después de perder 5, ¿cuántas canicas tenía en un comienzo?"*, porque se limite a organizar la información

6 La comparación entre *A* y *B* no se hace de forma directa. Se infiere gracias a que *A* y *B* se compararon con *C*.

contenida en un esquema aditivo numérico (algunos autores dicen estructura), sino porque además se representa episódicamente la situación de juego, recupera su experiencia y con ello es capaz de entender que el enunciado le habla de un episodio parecido a lo que él hace cuando juega, pero que en este caso la situación es narrada de forma incompleta ya que le falta el dato inicial. Esta segunda forma de proceder es muy propia del niño que todavía no posee un esquema más o menos elaborado, razón por la que se representa el problema reproduciendo la acción que evoca. Pero, a medida que avanza en su pensamiento aditivo, la reproducción de la acción no es tan episódica, hasta llegar a niveles en los que opera con las partes y el todo en abstracto, proceso este que se hace posible gracias a los progresos en la apropiación de representaciones simbólicas.

- Las formas de operar no se construyen independientemente de los contenidos sobre los que se aplica. El proceso de construcción es más bien un proceso de reconstrucción constante en cada contenido. Es decir, el estudiante reconstruirá el orden en el número, en la medida, en lo geométrico, en cada sistema de conceptos que incluyan orden, y lo hará de forma lenta y no como fruto de reproducir las técnicas que le enseñan en la escuela. Es el producto de reorganizaciones constantes de su pensamiento, al intentar comprender y resolver los problemas a los que se enfrenta en la escuela y su experiencia de la vida. Cada reconstrucción específica consolidará la capacidad operatoria de los estudiantes. Esto significa que las construcciones no sólo serán más rápidas, sino que cada vez tendrán más posibilidades de ser aplicadas en contenidos relativamente novedosos.
- Las formas operatorias no pueden enseñarse aisladas de los diferentes contenidos, con la pretensión de que después sean aplicadas a contenidos particulares. Tampoco deben ser vistas como prerrequisitos que deben enseñarse antes de la comprensión de los contenidos. El niño, va capacitándose para operar porque el profesor propicia condiciones para ello, a través de los múltiples sistemas de conceptos que le enseña.

1.3.2. Implicaciones curriculares

De las ideas hasta aquí expuestas se desprenden consecuencias que inciden en el currículo. A continuación se exponen algunas consideraciones que se destacan por tener más impacto al tratar de formular algunas orientaciones curriculares.

Adecuar a las posibilidades del pensamiento de los estudiantes los contenidos a enseñar

Lo que se planee enseñar ha de adecuarse a los niveles del desarrollo del pensamiento alcanzado o próximos a ser alcanzados por los estudiantes.[7] Como ya se ha dicho, la comprensión de un sistema conceptual[8] requiere establecer relacio-

7 No se está afirmando que primero hay que esperar a que se desarrolle el pensamiento de los estudiantes hasta el nivel requerido y después sí enseñar los contenidos. El desarrollo es un proceso que se complejiza por la interrelación de múltiples factores (maduración fisiológica, experiencia con el mundo material, simbólico, social y cultural). La escuela juega un papel importante en este proceso, apoyando a los estudiantes en la apropiación de las construcciones de la cultura.

8 Un concepto no se presenta aislado. Siempre está en relación con otros conceptos, constituyendo redes que se organizan como sistemas conceptuales. La expresión 'sistema conceptual' será utilizada en dos sentidos diferentes, pero solidarios: a) los *sistemas conceptuales* como unidades del pensamiento de los sujetos son las herramientas intelectuales que estos poseen y que les sirven para comprender y actuar en el mundo. Con ellos los sujetos dan significado y sentido a su realidad y b) los sistemas conceptuales como unidades del conocimiento que hacen referencia a las unidades que constituyen los constructos teóricos, en este caso de la matemática, y junto con los anteriores, los sujetos, comprenden y actúan en el mundo. En este sentido, la labor de la enseñanza en matemática consistiría en promover la transformación del pensamiento de los estudiantes de tal forma que sus sistemas conceptuales se aproximen cada vez más a los sistemas conceptuales propios de la matemática escolar.

nes entre los conceptos que lo constituyen y a su vez operar con ellos. Estas relaciones y operaciones configuran las demandas lógicas que hace la comprensión de un determinado sistema conceptual. Para que exista la posibilidad de un aprendizaje comprensivo o significativo, se necesita una distancia adecuada entre la capacidad operatoria del estudiante y las demandas lógicas de los conceptos que se pretende que aprenda. En caso de ser esta distancia inadecuada, el aprendizaje que se produce no es significativo. En términos de Vigostky, los conceptos que se van a enseñar a los estudiantes deben estar ubicados en la zona de desarrollo próximo. Y de acuerdo con Piaget, las experiencias de enseñanza que se planeen deben ser tales que produzcan en los alumnos cierta tensión cognitiva y promuevan la constitución de un problema en el alumno, con el fin de movilizar procesos de reorganización de su pensamiento. Se trata de ofrecer experiencias problematizadoras que progresivamente produzcan desequilibrios cognitivos.[9]

El estudio de un sistema de conceptos en un determinado grado escolar debe contemplar la correspondencia entre las demandas operatorias que hace la comprensión de ese sistema de conceptos y el nivel de desarrollo del pensamiento vinculado con ellos. Por ejemplo, a una compresión razonable de los enteros no podrá accederse si los estudiantes no logran anticipar, mediante una composición, el resultado de aplicar de forma sucesiva dos o más operadores naturales (entender de forma genuina que al agregar 7 a un número cualquiera y al resultado obtenido restarle 10, se reduce en un solo paso: *que se le quite 3*). De esta exigencia se desprende entonces la necesidad de estudiar las demandas operatorias que se hacen a partir de los diferentes sistemas conceptuales considerados deseables de enseñar.

Organizar en forma no lineal los planes de estudio

¿El estudiante va construyendo sus marcos lógicos de forma integrada en uno u otro sistema, o son procesos independientes o jerarquizados en los que primero se agota uno (o al menos se tiene que avanzar un gran trecho) para después pasar al otro, de tal forma que los logros alcanzados en el primero se constituyen en un especie de prerrequisito para el siguiente? Las adquisiciones que un alumno logra en un sistema se constituyen en apoyos para las construcciones en otros sistemas. En otras palabras, las construcciones en un sistema alimentan las posibilidades de complejización en los otros. Sin embargo, esto es posible a condición de que durante el proceso de enseñanza el profesor ayude al educando a establecer estas relaciones y lo anime a tender puentes entre uno y otro. No se trata de un proceso de generalización y transferencia que se produce de inmediato y de forma automática. Como lo muestran las diferentes investigaciones, se trata de reconstrucciones continuas. El estudiante tiene que reconstruir progresivamente en cada sistema las construcciones que va logrando en los otros. El que se enfrente permanentemente a diferentes situaciones problemáticas tomadas de los distintos sistemas matemáticos le posibilita llenar de significados los conceptos que se le ayudan a construir, a la vez que se le apoya para trabajar diferentes formas de representación de un mismo grupo de ideas. Los alumnos no construyen los conceptos, o

9 Problematizar con las distancias entre lo que demanda cognitivamente la situación y lo que posee el estudiante, también involucra los componentes afectivos, motivacionales y actitudinales, y también con el sentido que los humanos le imprimimos a nuestras actuaciones. Componentes estos que todos reconocemos pero con frecuencia descuidamos.

mejor los sistemas conceptuales, a partir de la exposiciones de definiciones y de ideas que los relacionan, sino a partir del esfuerzo de poner a funcionar, de forma coordinada, sus propias ideas en el intento de dar sentido y significado a las múltiples situaciones problemáticas a las que se enfrenta.

Las razones expuestas exigen un currículo flexible, una organización no lineal de los contenidos de estudio. Las secuencias rígidas y distribuidas de forma precisa en el tiempo tienen que dar paso a organizaciones más abiertas donde se trabajen simultáneamente diferentes sistemas conceptuales, de tal forma que las elaboraciones logradas en uno, reporten progresos en los otros. Tal situación implica volver a experiencias ya vividas con el fin de facilitar a los estudiantes progresivas reestructuraciones.

La investigación en educación matemática reconoce que los conceptos se construyen a partir de la coordinación de las acciones y de la reflexión que el sujeto hace sobre el resultado de estas y sobre las coordinaciones mismas. Estas acciones deben ser múltiples y deben aplicarse a variados contenidos, ya que esto permite tejer la red de relaciones que estructuran un sistema de conceptos. De ahí la necesidad de un currículo que permita enfrentar a los alumnos a múltiples y variadas experiencias. Esto les posibilitará reconocer la estructura común entre ellos, al identificar lo que permanece constante e invariable a pesar de las diferencias específicas.

Una educación matemática integrada a la vida y a diferentes campos del conocimiento

La vinculación de la matemática a situaciones cotidianas de los estudiantes ayuda a enriquecer el significado de los conceptos, en tanto que puede conectarlos con construcciones ya logradas por la experiencia. Los alumnos poseen profundas intuiciones construidas a lo largo de su vida, logradas por las interacciones con el mundo de las cosas, el mundo social y cultural, adquisiciones alcanzadas tanto por la acción escolar como por las experiencias extraescolares. En este proceso el lenguaje juega un papel primordial en tanto que no sólo es una herramienta para comunicar sino ante todo para pensar. La enseñanza, en este sentido, ha de ser entendida como la acción que apoya a los educandos a transformar, a enriquecer su pensamiento. Pero no se trata de un movimiento en una única vía, dejar ingresar la vida a la escuela, sino de un movimiento en sentido contrario y complementario, brindarles la posibilidad de regresar a la vida cotidiana con las herramientas matemáticas escolares enriquece el significado de los conceptos, en tanto que puede conectarlo con construcciones ya logradas por la experiencia. Las tiendas, los bancos, los servicios de biblioteca, los campeonatos deportivos, las investigaciones de opinión, los hechos relevantes de la comunidad y las noticias, son fuente de construcción y aplicación del conocimiento matemático.

Enfrentar situaciones problemáticas que involucren conceptos de otros campos del conocimiento ayuda a ampliar el significado de los conceptos matemáticos y el sentido de la matemática. Claro está, que para esto no basta la aplicación ciega de una fórmula o algoritmo, sino la comprensión profunda. La construcción de modelos o de artefactos en los que se piden planos y cálculos precisos sobre los materiales y los efectos producidos por fuerzas, por movimientos de ruedas, piñones o poleas, es un campo privilegiado en el que el estudiante tiene la oportunidad de establecer muchas conexiones, que no sólo enriquecen los significados sino los sentidos de las ideas matemáticas.

Una educación matemática que reconoce al estudiante de forma integral

Se asume que el estudiante es un sujeto inscrito en un contexto cultural, social y familiar, poseedor de una historia, factores que hacen parte de sus posibilidades de aprendizaje. El alumno no es solo sujeto cognitivo, también es sujeto ético y afectivo. Pero también el profesor está presente en el aula como totalidad; las expectativas de uno y otros sobre lo que debe enseñarse y aprenderse, sobre cómo y para qué, sobre sí mismo y los demás, sobre las experiencias didácticas hacen parte del sistema de relaciones del aula.

Lo que se tramita en el proceso de enseñanza-aprendizaje no es únicamente conocimientos; cada vez que se aborda la enseñanza de cualquier concepto, de manera implícita o explícita, consciente o no, se están tramitando otros contenidos en el orden de lo ético, lo moral, lo afectivo, lo estético; se están enseñando ciertas actitudes frente al aprendizaje y a la matemática misma.

Reconocer y comprender estas otras dimensiones del proceso de enseñanza-aprendizaje distintas a las cognitivas obliga a pensar algunas condiciones del ambiente del aula como parte integral de las experiencias didácticas. Lamentablemente estas condiciones generalmente no son objeto de investigación y tienen poco desarrollo en los procesos de formación del profesor, más o menos se asume que están ahí y que para abordarlas al maestro le bastan las intuiciones que ha ganado como sujeto social y psicológico. Pero la realidad muestra que son muchos los aspectos de las condiciones de aprendizaje en el aula que merecen atención.

El contexto, la situación misma y la naturaleza de la tarea; *es diferente una situación abierta como una tienda o un juego a una situación didáctica estructurada en la que se requieren momentos de reflexión, toma de conciencia, diferenciación.* En cada una de ellas tanto el docente como los alumnos pueden asumir roles y formas de actuar diferentes. En la primera por ejemplo es válido el movimiento, el desplazamiento, en la segunda se requiere de parte de los sujetos centrarse, aquietarse, el silencio es necesario.

Son muy importantes la organización social del aula y las formas como se ejerce el poder entre los mismos niños y, entre el docente y los alumnos y los diferentes roles que se juegan. *El liderazgo, por ejemplo, ¿siempre está en manos de los mismos o se rota en el aula*?, ¿la distribución de responsabilidades y el control de la acción está en manos del docente o se traspasa, *en sentido vygotskiano,* a los alumnos de acuerdo con su momento y posibilidades? ¿Cómo se estructuran los grupos, con qué criterios, y cómo se regulan los estudiantes? ¿Qué tipo de relaciones se promueven, individualistas, competitivas o colaborativas?, ¿los alumnos se plantean metas comunes, se definen conjuntamente las acciones, se distribuyen las responsabilidades? Todas estas son preguntas que el maestro ha de pensar para llevar a cabo el acto pedagógico. Las investigaciones que han realizado en Inglaterra Mercer y Edwards, o en Estados Unidos Jhonson y Jhonson, muestran que el trabajo en grupo que requiere la escuela, no se da de manera espontánea, sino que tiene que enseñarse.

Otro componente que cuenta en el aula es lo afectivo-emocional. "El crecimiento emocional no sucede espontáneamente, sino que se aprende a construir en el contexto de una interacción mediada o situada en un escenario cultural y en los estados intencionales mutuamente interactuantes de los participantes"

(Bruner, J. 1991). Si bien los estudios de la relación entre lo afectivo y el aprendizaje en general, y en particular de la matemática, son muy dispersos, y a pesar de las ideas confusas y diferencias que puedan existir, los estudiosos coinciden en reconocer que eso que algunos autores acuñan como "dominio afectivo", incluye una amplia gama de hechos que están vinculados con las actitudes, con las creencias, con las apreciaciones, con los gustos, con las preferencias, con las emociones, con los sentimientos y con las valoraciones que tienen los individuos, y que todo esto tiene que ver con las posibilidades de aprendizaje. Las formas de responder a este conjunto de aspectos es distinta, depende de la forma como se la conciba. Por ejemplo, por citar un componente importante involucrado en la actuación de los estudiantes como el interés y la motivación, tradicionalmente se asume que estos son procesos que se producen en el sujeto que aprende, en un movimiento que va de afuera hacia adentro, de ahí que se considere posible manipularlos durante el proceso de enseñanza, mediante estímulos (premios o castigos). Pero otras perspectivas más constructivistas proponen ver las cosas de forma diferente. El gusto, ese que perdura y que permite mantener el interés y la motivación por enfrentar pequeñas o grandes empresas, conviene que sea entendido como la expresión de los factores afectivos más internos del aprendiz. Ese estudiante al que se le ayuda a cultivar un positivo autoconcepto como aprendiz, al que se le presenta una matemática que lo problematiza, que le plantea retos, que lo invita a crear, a hacer de pequeño matemático; a ese alumno al que se le reconocen sus sentimientos y que por lo tanto se le anima y se le fortalece ante los fracasos parciales, se le proporcionan elementos para que reconozca y corrija sus propios errores, se sentirá capaz de aprender, de ensayar caminos no recorridos para buscar soluciones nuevas, e incluso, exhibirá tenacidad para perseverar ante estos fracasos. Del refuerzo permanente fruto de los pequeños y constantes éxitos se nutrirá su gusto, su disfrute por lo que hace. Por el contrario, aquel niño que fracasa de manera frecuente, que está sometido a repetir mecánicamente, termina encontrando poco placentero eso que se le enseña y desiste de aprender o lo hace de manera pasiva y entra a engrosar la ya larga fila de los que les va mal en matemáticas.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Referentes para pensar una propuesta curricular

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

2. Referentes para pensar una propuesta curricular

En este capítulo se presentan algunas orientaciones generales para pensar lo que sería una propuesta curricular en el campo del Pensamiento Matemático. Se entiende, como se ha dicho, que esa propuesta debe estar en correspondencia con los fines y principios de los *Colegios públicos de excelencia para Bogotá*. Aunque esta es una ampliación y revisión de lo planteado en la primera versión de este documento, sigue siendo una aproximación, una propuesta curricular es una hipótesis de trabajo que hacen los educadores para orientar su labor pedagógica. La concreción de esta propuesta será el fruto de las reconstrucciones resultantes de la negociación de significados con los docentes y de las configuraciones institucionales, que en cada caso emergen del interjuego de las múltiples condiciones determinantes de lo escolar; es deseable que la negociación se soporte en procesos de investigación, innovación y formación docente, en la reflexión y el debate fundamentado que la Secretaría de Educación Distrital tendrá que propiciar y promover, no sólo referido a lo curricular y a la didáctica, sino también a esas determinaciones institucionales.

En un primer término se presentan algunas afirmaciones a manera de principios orientadores en la formulación de esta propuesta. Y en segundo lugar, se aborda el problema de definir la estructura de la propuesta curricular.

2.1. Principios orientadores

En correspondencia con lo desarrollado, la propuesta curricular se pensaría de tal forma que permita organizar unas prácticas de enseñanza que posibiliten construir ambientes de aprendizaje, simulen pequeñas comunidades de conocimiento y que conjuntamente promuevan la actividad de hacer matemática, donde los estudiantes hagan suyos los problemas que se les presentan. Además, que ellos formulen sus propias conjeturas, -apoyándose cada vez más en el saber de la matemática académica-, las comuniquen y las sustenten a otros, haciendo uso de diferentes sistemas de representación y muy especialmente y de forma progresiva de las representaciones simbólicas propias de la matemática. Se sugieren prácticas en las que se diseñen y desarrollen formas de validación, desde las posibilidades de los estudiantes y se propicie un medio en el que se avive la negociación de significados (entre los alumnos, entre éstos y el profesor) mediante el uso de la argumentación, tan sustentada como sea posible según los niveles alcanzados por los aprendices.

Esto requiere que se:

- Reconozcan las experiencias y elaboraciones matemáticas propias que las comunidades y los individuos construyen al intentar resolver sus problemas vitales, e interactuar con los instrumentos simbólicos de la cultura.
- Promueva el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, de tal forma que les permita acceder a un aprendizaje comprensivo de los diferentes sistemas conceptuales considerados posibles y deseables de enseñar. Así como desarrollar estrategias personales para el análisis de situaciones cotidianas, académicas y estrategias para desarrollos y aplicaciones tecnológicas.
- Responda a los intereses de los estudiantes y se enriquezcan, de tal forma que se movilice en ellos la voluntad de apropiarse de los instrumentos conceptuales y procedimentales de las matemáticas.
- Promueva la autonomía de los alumnos, basándose en el fortalecimiento de la autoestima y del autoconcepto como aprendices inteligentes, capaces de un pensamiento crítico, creativo, y en el traspaso del control de la acción en el aula, que les permita asumirse como sujetos responsables de sus propios aprendizajes.
- Promuevan capacidades de reconocer al otro como interlocutor válido. De abordar colectivamente empresas de conocimiento y participar en la construcción de espacios de comunicación veraces, plausibles, sinceros y rectos, en los que los argumentos y los procesos de validación se sustenten con el propósito común de buscar lo que a los miembros del grupo les aparece como razonablemente aceptable.

2.2. Tres componentes de la propuesta curricular: ejes, estrategias y subcampos del pensamiento

La estructura de la propuesta curricular se hace sobre la base de aceptar que el centro de atención de la educación matemática es el desarrollo del Pensamiento Matemático, entendiendo pensamiento como la unidad de procesos y contenidos. Por las ideas hasta aquí desarrolladas y a manera de síntesis, puede decirse que cualquier acto intelectual, cualquier esfuerzo de comprensión de aspectos específicos del mundo natural, social y cultural, o de los conocimientos que se enseñan en la escuela, es un acto de pensamiento, en el que los sujetos usan los significados propios que poseen y operan con ellos valiéndose de sus capacidades de pensar (de los procesos cognitivos percepción, memoria, razonamiento, lenguaje, comunicación entre otros y de sus capacidades operatorias), de sentir y de valorar. Aunque para efectos de análisis se distingan procesos de pensamiento de los contenidos del pensamiento, procesos y contenidos son parte de un mismo hecho: el pensamiento. Así, en todo acto de aprendizaje de la matemática están presentes las capacidades generales del pensamiento[10] y los contenidos de éste, los que se piensan. Al igual que un cuerpo teórico, en particular el de la matemática, un concepto no es una

10 Seguramente algunas estarán presentes de manera más intensa que otras, dependiendo del acto de pensamiento particular que se viva. También es muy factible que unas se darán de forma más compleja según los momentos del individuo, tanto en su desarrollo intelectual general como en las construcciones que el sujeto haya alcanzado en el campo específico en el que se produce el pensamiento.

simple idea o definición aislada, sino es un sistema producido por el conjunto de ideas primitivas, principios, definiciones e inferencias que se hagan. En el plano del pensamiento, un concepto es una red de ideas sobre un aspecto particular del mundo. Dicha red está constituida por contenidos y por las relaciones entre sí mismos. El pensamiento hace referencia a la ideas y a las operaciones que se realizan con ellas.

La propuesta formulada se organiza sobre tres componentes: ejes, subcampos del pensamiento y estrategias.[11] *Los ejes* atraviesan los diferentes componentes y momentos del currículo y cumplen la función de articulación de los contenidos y actividades de enseñanza. *Las estrategias* hacen referencia a medios planeados e intencionados que atraviesen toda acción de enseñanza de la matemática, y *los subcampos* del pensamiento se relacionan con esas partes del pensamiento implicadas en la comprensión de los sistemas conceptuales en los que se organiza la matemática escolar.

Se toman como *Ejes Curriculares* algunos procesos cognitivos que están presentes en todo acto de enseñanza-aprendizaje en el campo de la matemática (por no decir que en todo acto intelectual) y que son materia de atención especial –aunque no de forma exclusiva- por este campo.[12] Estos son: razonamiento, modelación y comunicación y representación.[13]

La función articuladora de los ejes curriculares es doble, por un lado la *articulación horizontal* referida a las conexiones que se establecen entre los diferentes subcampos de pensamiento matemático, y por otra parte la *articulación vertical* que traza las líneas de progreso de un ciclo a otro. Entendiendo progreso como la ampliación y profundización de los sistemas conceptuales.

Se propone que toda actividad de enseñanza en el campo matemático sea pensada sobre tres *estrategias básicas*: a) *resolución de problemas* b) *establecimiento de conexiones* entre los diferentes subcampos del pensamiento matemático y los referidos a otros campos del saber y c) *apropiación y aplicaciones tecnológicas*, referidas a los procedimientos sistematizados producidos o utilizados en el conocimiento matemático para comprender y actuar en él y sobre el mundo.

Para efectos de organización curricular se propone imaginar el Pensamiento Matemático constituido por cinco *subcampos del pensamiento*: el pensamiento numérico, el pensamiento métrico, el pensamiento espacial, el pensamiento estadístico y aleatorio, y pensamiento algebraico-variacional.

11 En el documento de lineamientos curriculares de Matemáticas se contemplan cinco procesos generales: razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En esta propuesta se asumen tres como procesos y dos de ellos como estrategias, agregando una tercera estrategia, sugerida en los “Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática”.

12 Se ha definido este campo como el Desarrollo de la Dimensión Operatoria del Pensamiento de los estudiantes. Por lo tanto, esta dimensión no es materia de atención exclusiva del profesor de matemática y no sólo se trabaja a propósito de contenidos del conocimiento escolar inscritos en las matemáticas escolares.

13 El criterio de selección asumido excluye algunos que actualmente aparecen en varias propuestas de organización curricular. Dos de ellos son: el de resolución de problemas (propuestos por la gran mayoría de los currículos actuales) y el de conexiones (NTCM), no porque estos aspectos no se consideren importantes en la educación matemática, sino por no responder al criterio de selección definido. La resolución de problemas es una actividad que se realiza en todo intento de comprender y transformar el mundo, en particular de la matemática, pero no es un proceso cognitivo. Más bien es una actividad intelectual que incluye varios procesos cognitivos. De forma semejante, las conexiones no se ven como un proceso cognitivo, sino como una cualidad de toda actividad de enseñanza, que favorece la construcción y ampliación de significado.

2.3. Ejes curriculares

Como se ha dicho son tres los ejes curriculares: razonamiento, modelación y comunicación y representación. A continuación se desarrolla cada uno de estos ejes.

2.3.1. Razonamiento

Entre los estudiosos no existe total acuerdo sobre el tipo de hechos a los que se hace referencia cuando se habla de razonamiento.[14] Duval (2004) dice que con el término "razonamiento" por lo general se han designado démarches muy diferentes. De una parte, las que consisten en inferencias explícitas: de una proposición dada (o de varias) se "deriva" la afirmación de otra proposición. De otra parte, las inherentes a cualquier acto de exploración: se procede por anticipaciones seleccionando las que son confirmadas. Las primeras están intrínsecamente ligadas a la utilización de un lenguaje: son expansiones discursivas de proposiciones que fueron enunciadas primero a título de premisas. Las segundas, por el contrario, requeridas para toda adaptación a una situación nueva, no están intrínsecamente ligadas a la utilización de un lenguaje: problemas que para resolverlos es suficiente una manipulación de objetos o de instrumentos sin recurrir a una verbalización, movilizan espontáneamente esas démarches de exploración".

Para Carretero y García (1984) razonamiento "es aquél proceso que permite a los sujetos extraer conclusiones nuevas a partir de premisas o acontecimientos dados previamente". Pierce (1901) considera el razonamiento como el acto de elaborar inferencias.

13 En parte esto sucede porque el razonamiento guarda estrecha relación con otros procesos psicológicos como la percepción, la categorización, el aprendizaje, la solución de problemas, o el lenguaje, se lo ha llegado a considerar a veces como sinónimo de la propia cognición (Rips, 1990).

En su definición clásica, la inferencia es una operación lógica que se refiere a proposiciones admitidas como verdaderas (las premisas) y que concluye en la verdad de una nueva proposición en virtud de su vinculación con las primeras. Este autor distingue tres formas de hacer inferencias: abductiva, deductiva e inductiva. La primera es considerada como la elaboración de argumentos que pertenecen al orden de la invención y de la creación autocontrolada de conocimientos nuevos. Por ella se efectúan todos los progresos y se le encuentra en el origen de todo saber nuevo. Las deductivas se refieren a la elaboración de un argumento que es una conclusión y debe derivarse necesariamente de las premisas. Las inductivas se refieren a la obtención de conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares.

Considerar los procesos inferenciales como los procesos de pensamiento mediante los cuales se obtiene información nueva a partir de una conocida, permite aceptar que éstos no son exclusividad de la actividad académica o científica. La vida cotidiana está colmada de ellos, cualquier adulto o niño normal en su vida cotidiana y en el desempeño de sus oficios o profesiones da muestras, con mayor o menor destreza, de poseer esta capacidad. Los niños muestran desde temprana edad una sorprendente capacidad de razonar cuando lo hace en contextos cotidianos. Thornton (1998) relata el diálogo entre una madre y su hijo de unos 2 años. Niño (N): "¡Jack rompió mi coche!", Madre: Estoy segura de que no lo hizo….", N: ¡Lo hizo!, ¡lo hizo! Harry no fue allí (al cuarto de jugar). Jack rompió mi coche". Al observar el niño su juguete dañado infiere que alguien fue responsable de ese acto y el responsable tuvo que entrar a su cuarto de jugar, como sabe que Harry no estuvo allí, fue Jack. Más allá de la validez y verdad de su conclusión, lo destacable es la cadena de inferencias que muestra que es capaz de hacer.

Algunas investigaciones de las últimas tres décadas intentan estudiar los procesos cognitivos, en particular los relativos al razonamiento, en la misma acción y en ambientes "naturales". De estos esfuerzos nacen intentos por diferenciar entre lo que se ha llamado "pensamiento formal" y "pensamiento informal". Aunque tampoco no existe acuerdo en este punto, para los propósitos de este documento son ilustrativas las aproximaciones propuestas por de Galotti (1989, citado por Fernández y Carretero,1995): "El razonamiento informal, o razonamiento de la vida cotidiana…, cubre las actividades intelectuales que componen el pensamiento aplicado en nuestras vidas cotidianas: planificar, cumplir nuestras obligaciones, evaluar argumentos, descubrir y elegir opciones. En este tipo de razonamiento, las premisas no vienen dadas completamente en el problema…" y por Voss, Perkins y Segal (1991): "Razonamiento informal es el razonamiento que se aplica fuera de los contextos formales de la matemática y la lógica simbólica. Implica razonamiento sobre las causas y las consecuencias, sobre las ventajas y las desventajas o los pros y los contras de determinadas proposiciones o de alternativas sobre las que hay que decidir". Fernández Pablo y Mario Carretero (1995) destacan algunas características del razonamiento informal: se aplica a cuestiones de la vida cotidiana y relevantes para la persona, se relaciona con la capacidad de elaborar argumentos, es dependiente del contexto situacional, se aplica a tareas abiertas o mal definidas a tareas no deductivas, no utiliza un lenguaje formal o simbólico, sino el utilizado en la vida cotidiana y finalmente, se emplea en todos los dominios del conocimiento, incluso en problemas matemáticos o científicos-naturales.

El razonamiento formal se piensa más ligado al pensamiento matemático, al pensamiento deductivo. Sin embargo esto no debe llevar al equívoco de pensar que el proceso de producción del conocimiento matemático se hace exclusivamente por vía deductiva, ya que si bien la presentación del conocimiento matemático se rige por las reglas estrictas del razonamiento formal en cuanto tiene que dar cuenta de su validez mediante la prueba, la construcción del conocimiento matemático es más un proceso de creación, en el que participan otros tipos de razonamiento. Polya (1966), dice: "Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles". La prueba misma es a su vez descubierta por el razonamiento plausible.[15]

Así, el desarrollo de la capacidad de razonar no es exclusivamente el desarrollo de la capacidad deductiva y menos compete exclusivamente al campo del pensamiento matemático, aunque este campo puede ser un lugar privilegiado para desarrollar formas de pensamiento más formales. "En sus estudios previos sobre la lógica y la epistemología [los estudios de Piaget] propuso que el pensamiento lógico actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y que el pensamiento matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio…hay una

14 Plausible, admisible, justificado. Polya dice que el pensamiento plausible es discutible y provisional. para aprender algo nuevo sobre el mundo necesitamos el razonamiento plausible que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana.

estrecha relación ente el pensamiento lógico y el pensamiento matemático. Pero no puede pretenderse que las matemáticas son las únicas que desarrollan el pensamiento lógico en los estudiantes. Es pues necesario dejar claro que el pensamiento lógico no es parte del pensamiento matemático, sino que el pensamiento lógico apoya y perfecciona el pensamiento matemático, y con éste –en cualquiera de sus tipos- se puede y se debe desarrollar también el pensamiento lógico" (Vasco, 2006).

Para los propósitos de este trabajo se asume de forma muy amplia que este eje de razonamiento hace referencia a hechos que van desde esa capacidad del pensamiento de explorar una situación y extraer nuevo conocimiento, hasta un significado más restrictivo, más cercano a la capacidad de hacer deducciones, es decir de una o varias proposiciones dadas a derivar una o varias proposiciones nuevas, que se consideran consecuencias lógica de ellas.

Los hechos que se pueden asociar al razonamiento son muy amplios. Algunos que interesan en este documento son:

- Preguntar, conjeturar, formular hipótesis, diseñar estrategias de comprobación, analizar los datos obtenidos, extraer y formular conclusiones.
- Argumentar, entendiéndose como el proceso de ofrecer razones con la intención de convencer a otros, apoyándose en la exposición de la validez[15] de sus ideas. En particular se considera a la *prueba*[16] (muestra de la validez de una proposición basada en el método deductivo) como un tipo de argumentación.
- El control del mismo proceso del argumento construido.
- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procedimientos propios y de otros.
- Explicar y extraer regularidades que provengan de la observación de hechos que varían.

Entre los estudiosos tampoco existe acuerdo sobre cómo se da y cómo evoluciona la capacidad de razonamiento en los individuos. Sin embargo, se pueden destacar algunas ideas comunes de los diferentes enfoques:

- El niño pequeño posee una capacidad de razonamiento elemental que continúa complejizándose a lo largo de la vida.
- Aunque se aceptan actos de razonamiento sin apoyo explícito en el lenguaje e incluso sin que necesariamente esté inmerso en un acto de comunicación; lenguaje y comunicación son importantes para que la capacidad de razonamiento sea más compleja.
- El proceso de razonamiento, como cualquier proceso del pensamiento, depende de la mayor o menor comprensión que se tenga del contenido y del contexto situacional sobre el que se razone.

2.3.2. Modelación

Se puede aceptar que la modelación consiste en construir un objeto (material o no) y establecer una relación analógica entre ese objeto y el sistema real que se desea modelar, de tal forma que partes del objeto y sus relaciones corresponden con partes del sistema y las relaciones que se dan entre estas. Un modelo es una imitación del sistema real. Imitar un

15 La idea de validez en la argumentación está relacionada con la pertinencia del contenido de los enunciados y no en la organización de las proposiciones como un sistema (Duval, 2004).

16 Algunos autores como Balacheff, N (2000), León y Calderón (2003) incluyen la prueba (la demostración) en procesos de validación en la argumentación, mientras que otros como Duval (2004) la excluyen.

sistema del "mundo real" mediante un modelo resulta útil porque ayuda al pensamiento a "figurarse" cómo funciona el sistema real, además el modelo se puede "manipular" y con él se pueden hacer experimentos para formular y verificar predicciones sobre el sistema modelado. "*La mente humana busca relaciones de modelación para comprender. Dos sistemas cuyos elementos son de naturaleza muy diferente pueden tener una misma estructura o estructuras muy similares. Uno de los sistemas puede, entonces recordar o evocar el otro*" (Vasco y otros1995). Este recurso es muy frecuente en las ciencias en general y en particular en la matemática; es más, podría decirse que la ciencia no es otra cosa que modelación. La matemática al prescindir de los contenidos particulares lo que hace es construir modelos que permiten representarnos los elementos de un sistema y la forma como se relacionan.

Los sistemas modelo y modelado no son idénticos. El modelo representa los elementos y relaciones que al modelador le interesan o las que supone que son determinantes en el hecho que modela. En este sentido, puede verse al sistema modelo como una simplificación del sistema modelado, pero no por ello necesariamente empobrecido, en la medida en que al eliminar ciertos elementos y relaciones que no interesan al modelador pone al descubierto relaciones nuevas. Estas relaciones no habrían sido posibles si quien conoce se limita a la simple observación del hecho modelado. El recurso de la modelación abre posibilidades a la generalización puesto que al prescindir de las particularidades se amplia la variedad de casos en los que el modelo es válido, encontrando semejanzas en singularidades que no se sospechaban antes.

Un modelo es una representación del sistema real que se ha modelado. Pero no es cualquier representación. Lo fundamental está en su carácter figurativo, ya que la representación es modelo si permite "figurar en la mente". "Un modelo puede entenderse como un sistema *figurativo mental*[17], gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema – a veces se dice también una estructura- que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación o manejo" (Vasco y otros, 2006). Este carácter figurativo no está en el modelo, está en la relación entre ese modelo y de quien lo interpreta. Por ejemplo, la representación gráfica cartesiana de la ecuación de una recta puede ser vista como un modelo, dependiendo de quien la interpreta. Para un estudiante puede ser simplemente la figura resultante después de graficar los puntos de un proceso de tabulación o de encontrar dos puntos que satisfacen una ecuación. Para otro puede ser un dibujo que le ayuda a su mente a imaginar la forma que toman todos los puntos que siguen el mismo modelo (este sí tiene que estar en la mente del alumno). En el mejor de los casos para el primer ejemplo se tendrá a un educando bien entrenado para aplicar un procedimiento y en el segundo se tendrá un estudiante que puede imaginarse la variación. Si en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el segundo estudiante ha tenido la fortuna de enfrentarse a experimentos en los que debía estudiar fenómenos de dependencia lineal, estas representaciones mentales sí que son verdaderos modelos para estudiar este tipo de fenómenos.

La ecuación D=100-d por sí misma no es un modelo, pero un alumno puede considerarla como la representación simbólica de un

17 El subrayado es nuestro.

modelo de variación,[18] si él sabe que esta expresión representa la distancia "D" que le falta por recorrer entre dos puntos distantes entre sí 100 unidades, cuando ha avanzado una distancia "d" y puede figurarse la relación de variación entre "D" y "d". Quizá pueda figurarse tal cosa apoyándose en su capacidad de imaginarse una representación gráfica o los cambios de los valores de las dos variables, diciéndose a su interior algo como "claro siempre ocurre que lo que aumento a "d" en un momento dado es exactamente lo que disminuyo a "D".

Una expresión 13+24 puede llegar a ser para un niño la representación simbólica de un modelo de composición de partes. Un niño puede llegar a resolver problemas como "13 dulces de Pedro con 24 dulces de Alberto" y escribir la expresión 13+24 , pero pensándolo como un problema singular, sin lograr ponerlo en relación con otros de la misma estructura particular. Este niño resolverá otros problemas como éste (de la misma estructura), pero sin ser conciente de la semejanza entre unos y otros. Como parte de apoyar al alumno a progresar en su pensamiento aditivo, se le puede ayudar a imaginar muchas situaciones que pueden resolverse como 13+24, de manera que puede llegar a representarse mentalmente la expresión "13 + 24" como un modelo que le sirve para interpretar situaciones de este tipo. Este ejemplo ilustra que una condición esencial de un modelo consiste en dar cuenta de la representación de lo común en la variedad. Una representación numérica o algebraica puede llegar a ser la representación simbólica de un modelo a condición de que ella no esté anclada a lo singular.

18 En el documento de estándares de matemática del MEN ya referenciado, se dice "… todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, *como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos (es subrayado es nuestro)*, aunque pueden estarse interpretando en un modelo".

Los modelos que se utilizan en matemática son variados y cumplen funciones diferentes. Ackoff y Sasieni (1971) clasifican los modelos matemáticos como *icónicos, analógicos y simbólicos*. Los modelos icónicos son imágenes de la realidad. Ejemplos de ellos son las fotografías y los mapas; su diferencia fundamental con el objeto es la escala, pero en general son concretos y se prestan a la experimentación. Los modelos analógicos, como su nombre lo indica, surgen cuando se hace una analogía entre dos sistemas, donde uno de ellos se toma como el sistema modelador y el otro como el sistema modelado (por ejemplo, tomar el sistema hidráulico como modelo del eléctrico). Los modelos simbólicos son elaboraciones abstractas que permiten representar los elementos, las formas como varían y las relaciones entre ellas y sus variaciones. Estas se suelen expresar mediante expresiones matemáticas (como cuando se toman modelos funcionales). A lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje se requiere utilizarlos y promover que los estudiantes los construyan. Por eso es importante que los alumnos se enfrenten a problemas que involucran muchas dimensiones, en los cuales se tengan que tomar decisiones para controlar algunas o simplemente no contemplarlas en el análisis porque se asume posible desdeñar los efectos que ellas tienen en el resultado final, ensayar esas soluciones simplificadas y valorar su validez, tener presente que las soluciones dadas están limitadas a la condiciones que se pusieron para la búsqueda de la solución. El uso de sofware es una herramienta importante en esta tarea.

2.3.3. Comunicación y representación

Como ya se ha dicho, la práctica de enseñanza de la matemática es una práctica social en la que alumnos y docentes, en un contexto comunicativo: a) construyen representaciones sobre la disciplina matemática, sobre el enseñar y el aprender y b) se establecen en términos de Chevallard el contrato didáctico que se establece hace que tanto alumnos como docentes utilicen de manera explícita o implícita, unas reglas de funcionamiento, unas formas de comunicación, unas presuposiciones compartidas fruto de las expectativas y comprensiones comunes del acto de enseñar-aprender; presuposiciones que son construidas por alumnos y maestros al estar inscritos en un mundo cultural.

También se ha dicho que, al enseñar matemáticas no sólo se enseñan los principios, conceptos, métodos, y procedimientos propios de esta disciplina, sino además una forma de pensar, hacer y comunicar matemáticas. En términos de Vygotski, el lenguaje es la herramienta que el sujeto utiliza para darle sentido a la experiencia. "*El lenguaje es por lo tanto no solo un medio por el cual los individuos formulan ideas y las comunican, sino también es un medio para que la gente piense y aprenda conjuntamente, es decir cumple una función cultural (comunicar) y una función psicológica (pensar) que están interrelacionadas*" (citado por Mercer, 1997). El lenguaje se convierte en la herramienta[19] fundamental que reorganiza los propios procesos cognitivos y permite expresar y comunicar las comprensiones y construir con otros ese conocimiento.

El eje de comunicación y representación pretende asignarle un lugar privilegiado al papel del lenguaje verbal y no verbal en la construcción del conocimiento matemático escolar, y en las maneras como los maestros crean contextos comunicativos en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar.

En esos contextos comunicativos del aula se adoptan formas de observar, razonar, analizar, hablar, describir, justificar, argumentar y validar; es decir los sujetos, alumnos y maestros, ponen a funcionar un saber que han construido en los múltiples contextos en que se desarrolla su experiencia, que les ha dotado de las herramientas cognitivas y comunicativas para entender lo apropiado como miembros de esa comunidad de aprendices. En este sentido, la educación matemática puede entenderse como el espacio en el que se negocian significados y sentidos a partir de dos saberes, el de los estudiantes y el de la matemática escolar, representado por el docente.

El saber de la matemática escolar está constituido por sistemas simbólicos que cumplen una doble función: de soporte a la representación interna (mental) - utilizada como herramienta para pensar - y de representación externa, llamados por Duval (2004), sistemas semióticos, utilizada para comunicar ideas (en este caso de conceptos matemáticos). Estas dos funciones, aunque diferenciables, no son separables. "Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas". Los sistemas semióticos de la matemática comportan una sintaxis que involucra conceptos, de manera que su dominio exige la comprensión de estos y no la simple ejercitación de las reglas sintácticas.[20]

19 El lenguaje es entendido como un sistema de representación que media en el desarrollo cognitivo: lo que es social no se convierte directamente en individual, sino que pasa por un enlace, una herramienta psicológica. Pero el lenguaje no es entendido como un determinante del pensamiento, sino como un sistema de representación que media en el desarrollo cognitivo: lo que es social no se convierte directamente en individual, sino que pasa por un enlace, una herramienta psicológica. Dicho enlace mediador es el signo. El concepto de 'Herramienta' es tomado en su sentido materialista como transformadora del sujeto a la vez que se trasforma cuando este las usa.

20 Por ejemplo, la potenciación no es un simple problema de aprender a decodificar el signo de potencia basado en la multiplicación y manejar las reglas sintácticas que rigen las transformaciones de expresiones con potencias, es mucho más que eso, es desarrollar un pensamiento potenciativo que posibilite dar sentido y significado a esta operación en diferentes contextos, incluido el propiamente formal. Pero de forma complementaria el sistema de representación de la potenciación (los signos y sus reglas de tratamiento) es una herramienta para poder pensar esta operación.

Adicional a esta doble función de todo sistema simbólico de representación (medio de comunicación y soporte de la representación mental) está la necesidad y posibilidad que ofrece la pluralidad de sistemas de representación. Todo sistema conceptual de la matemática requiere de diferentes sistemas semióticos de representación para hacer posible la diferenciación entre el objeto matemático representado y el signo que lo representa.[21] A su vez, la diversidad de representaciones enriquece los significados que se le dan a las representaciones de un mismo objeto matemático.

No solo se requieren en la enseñanza diversidad de sistemas de representación, sino también diversidad de contextos de uso. Los significados de los signos, de las palabras se precisan, enriquecen y complejizan por su utilización en la diversidad de contextos. Contextos en los que las matemáticas están presentes, en la vida cotidiana, en las ciencias, la tecnología, el arte… En cada uno de ellos las palabras adquieren diversas significaciones que permiten ir tomando conciencia de la polisemia del lenguaje. Pero no solamente se tramitan diversas significaciones sino también se adquieren sentidos, en la medida en que los signos y las palabras actualizan intereses, motivos, intenciones y deseos del sujeto.

Los hechos que se pueden asociar con la comunicación y la representación en las matemáticas escolares son muy amplios y diversos. Es posible arriesgarse a realizar una clasificación de estos teniendo como criterio de organización, las principales funciones del lenguaje que plantea Jakobson[22]: cognitiva, comunicativa y expresiva –emotiva.

- Los procesos de comprensión (lectura y escucha) del lenguaje verbal y no verbal del sujeto en la construcción del saber matemático escolar.
- Los procesos de producción (escritura y habla) de los sujetos que participan en la actividad matemática.
- Las maneras como el sujeto se representa mentalmente las situaciones y problemas matemáticos relacionados con los diferentes sistemas conceptuales.
- Las representaciones externas o semióticas entendidas como las herramientas culturales que utiliza el profesor para promover formas de razonamiento, argumentación, modelación y comunicación cada vez más complejas.
- El intercambio y la negociación de significados y sentidos en el aula, en particular el ambiente y los diversos contextos y relaciones que se generan para estimular y posibilitar esta negociación.
- Las formas de expresión de las emociones y sentimientos que el sujeto activa en la construcción de ese conocimiento escolar.

2.4. Estrategias

Se dijo que la propuesta curricular en este campo se desarrolla sobre tres estrategias (resolución de problemas, conexiones y apropiación y aplicaciones tecnológicas). Las

21 Piense en la indiferenciación tan común en la escuela y que conduce a los estudiantes a grandes dificultades, entre el signo utilizado para representar un concepto y el concepto mismo; por ejemplo, la confusión entre el signo para representar el cardinal y su concepto, entre las fracciones como signo y el concepto mismo de fraccionario.

22 Un análisis más amplio se podría hacer retomando las siete funciones propuestas por D. Hymes (1962, citado por Stubbs, 1987) en la etnografía de la comunicación: expresiva-emotiva, directiva-conativa-persuasiva, poética, de contacto (físico y psicológico), metalingüística, referencial, contextual-situacional.

estrategias son acciones intencionadas que el profesor debe tener presente en la planeación y desarrollo de las diferentes experiencias en el aula, como medio para promover el desarrollo del pensamiento matemático. Se diferencian de los ejes, en tanto que estos últimos hacen referencia a procesos cognitivos considerados fundamentales, o al menos de gran importancia, en el desarrollo del pensamiento matemático; mientras las estrategias no hacen referencia a procesos cognitivos sino a pistas o caminos que se sugieren al maestro tener presente cada vez que planea y orienta la acción en el aula, con el fin de lograr que su intervención produzca efectos en un cierto sentido.

2.4.1. La estrategia de resolución de problemas

El desarrollo del pensamiento y del conocimiento, en general, en la escuela y fuera de ella, en los ámbitos científicos y no científicos, está determinado por la acción de resolución de problemas. En particular está presente en la matemática, aunque no de forma exclusiva.

Ya se señaló a propósito de la modelación que algunos autores muestran la conveniencia de enfrentar a los estudiantes a situaciones problemáticas a partir de las cuales encuentren las orientaciones y motivaciones adecuadas para formularse problemas, buscar estrategias que les permita llegar a soluciones correctas y juzgar lo razonable de estas soluciones. El promover la comunicación de los diferentes procedimientos, el uso de diferentes formas de representación y el análisis de la validez de las soluciones dadas favorecen la capacidad de los alumnos para resolver problemas.

Podría decirse que en educación matemática existen varias formas de asumir la actividad de resolver problemas; una, que podría distinguirse como actividad de aplicación, en la que una vez que se enseñan a los educandos algunas ideas se los enfrenta a algunos problemas, más o menos estereotipados y esperando que el alumno aplique lo recién enseñado y se haga a unos "prototipos" que le sirvan de referencia para resolver problemas nuevos. Algunas veces, los estudiantes tienen la oportunidad de enfrentar problemas con algún grado de novedad que les exige establecer relaciones con otros conocimientos. Otra forma de asumir la actividad de resolver problemas en la enseñanza, consiste en enseñar estrategias; desde esta perspectiva se identifican estrategias "exitosas"[23] y se procura entrenar al estudiante en su uso. Se espera por esta vía superar el modelo de los prototipos, sin embargo no es muy claro hasta qué punto se logra superar el fundamento reproduccionista de la primera perspectiva, pues podría decirse que en este segundo caso se trata de hacer más eficiente al alumno en la resolución de problemas enseñando prototipos ya no de problemas sino de estrategias. Pérez y Pozo (1994), afirman: "Puede que instruir a un estudiante para que divida un problema en subproblemas no sea muy útil, debido a que este estudiante no sabe cómo debe utilizar esta estrategia en ese problema". *En esta misma línea, Nickerson, Perkins y Smith* (1985), señalan que la enseñanza de las estrategias, aunque es deseable y aun reconociendo que pueden producir algunos efectos positivos, se encuentra con dos tipos de dificultades. Una primera, se relaciona con la dificultad de saber cuándo estas estrategias sirven para resolver un tipo de problema determinado y una segunda, tiene que ver con el hecho de que las estrategias no pueden ser lo suficientemente concretas para su realización dentro de un terreno poco familiar.

23 Los métodos que siguen los expertos pueden enseñarse a los novicios.

Una tercera forma de entender la actividad de resolución de problemas, está más cercana a propiciar el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, resultado del desarrollo del pensamiento involucrado en el problema. "Las posibilidades de un aprendizaje significativo de cualquier estrategia de resolución de problemas no puede desvincularse del contenido de aplicación de la estrategia, más exactamente de los sistemas conceptuales en los que se formulan los problemas y busca aplicar la estrategia". En otras palabras, el aprendiz no aplica una estrategia aisladamente de las comprensiones que tenga del campo de conceptos en los que se pretende su aplicación. En este orden de ideas, cuando Nickerson, Perkins y Smith (1985) señalan que una dificultad de la enseñanza de estrategias de resolución de problemas consiste en que el aprendiz sepa cuándo estas estrategias sirven para resolver un tipo de problema determinado, puede objetarse que esta forma de ver, separa estrategias y contenidos del pensamiento, como si fueran dos componentes del pensar. En la literatura se habla de los componentes declarativo, y procedimentales –algunos agregan un tercer elemento: el estratégico-, para expresar esta distinción. Una forma alternativa de asumir el problema estaría en reconocer, como lo hace Vigotsky, que las formas del pensamiento y sus contenidos son inseparables; de forma tal que el adecuado aprendizaje de estrategias de resolución de problemas necesariamente estará ligado a la comprensión que el aprendiz tenga de los sistemas conceptuales implicados en los problemas que han de resolverse. Es posible que pueda reconocerse el valor que tiene para un aprendiz acceder a indicaciones procedimentales sobre la forma de abordar unos problemas, pero éstas serán aplicadas de forma comprensiva a condición de que el aprendiz posea un pensamiento que le permita comprender los conceptos que ellos implican" (Castaño J y Forero A, 2006).

En el proceso de resolución de problemas intervienen otros factores distintos a los estrictamente cognitivos. Según Lester (1983, citado por D`Amore, B., 2006), existen cinco grandes categorías para tener en cuenta en el curso de este proceso: el conocimiento a disposición del sujeto resolutor (pero no sólo fórmulas, algoritmos, definiciones, etc. sino también formas de organización, modos de control y el uso del propio conocimiento), el control (lo referido a la metacognición), factores afectivos (emociones, actitudes y motivaciones), imágenes y convicciones sobre la matemática, sobre la escuela [debe agregarse; sobre el mismo proceso de resolución de problemas] y condiciones socioculturales. Si bien estos factores no dependen exclusivamente de la acción escolar, y algunos menos que otros, conviene reconocer que las prácticas de enseñanza intervienen en gran medida en su construcción. Como parte del "contrato didáctico" los estudiantes aprenden actitudes y se hacen a imágenes del hecho de resolver problemas.

Una auténtica actividad de resolución de problemas moviliza el pensamiento del estudiante, por cuanto lo estimula a usar crítica y creativamente el conocimiento que posee, lo invita a disponerlo de forma nueva, promueve la formulación de conjeturas e hipótesis y la construcción de métodos y argumentos para validarlas o invalidarlas, favoreciendo así la ampliación y consolidación de diversos significados y encontrar nuevos sentidos a lo que se aprende, hecho importante que motiva al aprendizaje, contribuye a monitorear sus estrategias, a impulsar la tenacidad necesaria para el progreso intelectual y a encontrar disfrute en el conocer y trabajar en forma colectiva, en el que haya lugar al reconocimiento recíproco.

2.4.2. La estrategia de conexiones

Los estudiantes amplían y complejizan sus comprensiones de los conceptos a medida que se enfrentan a múltiples y variadas situaciones que los involucran. Allí tienen la oportunidad de establecer nuevas relaciones con otros conceptos, de tomar conciencia de algunas que se le habían escapado o de asumirlas de forma distinta, lo que les permite ampliar y estructurar los significados que le dan a los conceptos y los sentidos de aprendizaje.

Tradicionalmente las matemáticas se han enseñado como la suma de contenidos más o menos inconexos entre sí, los contenidos correspondientes a los diferentes sistemas en los que suele organizar el conocimiento matemático escolar se presentan como compartimentos independientes. Como resultado de este proceder los alumnos aprenden contenidos desarticulados, algunos casos son realmente aberrantes. Los estudiantes aprenden lo relativo al sistema decimal de numeración sin mayor conexión con los sistemas de medida. Los números fraccionarios no tienen ninguna conexión explícita con lo relativo a la proporcionalidad que ellos involucran. La misma proporcionalidad es estudiada independientemente de la variación. Los conceptos geométricos no tiene mayor relación con lo numérico, los conceptos de estadística y probabilidad no tienen mayor vinculación con la geometría y con el número.

Si las conexiones al interior de la misma matemática son escasas, con mayor razón lo son con otros campos del conocimiento. Las posibilidades que tienen los estudiantes de relacionar conceptos matemáticos con las ciencias naturales son realmente pobres, mucho más débiles son la que se establecen con las ciencias humanas y con las artes. La tendencia a estudiar la matemática por la matemática ha conducido a que en la enseñanza no se apoye a los alumnos para que vinculen los conceptos que se les enseñan con situaciones de la vida no escolar. Esta desarticulación no sólo trae como consecuencia que el estudiante termine haciéndose a la idea segmentada y compartimentalizada del conocimiento matemático, sino además pensando que la matemática sólo tiene que ver con los problemas de los libros y que no tiene mayor vinculación con la vida cotidiana.

Esta estrategia llama la atención a los maestros sobre la importancia de pensar las experiencias de enseñanza de tal forma que intencionalmente se aborden situaciones más o menos amplias que exijan establecer conexiones entre conceptos al interior de la misma matemática, con otros campos del saber y con situaciones cotidianas. Experiencias de enseñanza tipo proyecto de aula, construcciones de prototipos, de artefactos o herramientas, participación en juegos reglados o no, realización de investigaciones sobre problemas del barrio de la comunidad a la que pertenecen los estudiantes ofrecen múltiples oportunidades para establecer conexiones entre los conocimientos. El enfoque de resolución de problemas en matemática conlleva la idea de esta estrategia de conexión, una situación problemática supone cierta amplitud, que no puede resolverse con una idea puntual, o con la aplicación de un único concepto.

2.4.3. La estrategia de apropiación y aplicaciones tecnologías[24]

El conocimiento matemático, como todo campo del saber humano, define y a la vez es definido por formas de comprender y actuar en él y sobre el mundo; estas formas de comprensión y actuación están mediadas por las herramientas conceptuales y metodológicas que produce, así, los conocimientos y las herramientas metodológicas que arroja la matemática son formas de problematiza-

24 Clara Emilse Rojas colaboró en la escritura de este parágrafo.

ción y procedimientos de actuación. Estos procedimientos son tecnologías, incluyan o no instrumentos materiales. En este sentido un sistema simbólico como el utilizado para contar, leer y escribir los números es una tecnología, tan es así que produce procedimientos precisos de actuación cuando se hacen cuentas. Cada actividad debe considerarse como una oportunidad de apropiación tecnológica (sistemas de representación, algoritmos y, pero no de forma exclusiva, instrumentos computacionales) y de aplicación del conocimiento matemático apropiado en el uso y producción de artefactos.

Siguiendo a Moreno (1999), se dirá que "la importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática, y a su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología".

Dentro de los alcances del uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase de matemáticas se considera que el estudiante sea capaz de indagar, analizar y evaluar información; examinar estrategias para solución de problemas; reconocer distintas representaciones de objetos matemáticos; visualizar relaciones y estructuras conceptuales; identificar relaciones matemáticas en el desarrollo tecnológico, en otras ciencias y en su entorno; reconocer las características del mecanismo de los artefactos tecnológicos, aprender a usar software específicos; programar usando un lenguaje o bien haciendo sus propias creaciones y críticas frente al uso de estas herramientas.

Asumir el reto de incorporar la tecnología en el aula conduce a los maestros a profundizar en sus conocimientos matemáticos y a cuestionar sus prácticas en el aula. Ver la tecnología no solo en el sentido del uso del computador sino de procesos más generales relacionados con el uso de la información.

2.5. Subcampos del Pensamiento Matemático

En esta propuesta se propone distinguir cinco subcampos constituyentes del campo del Pensamiento Matemático. Esta distinción obedece, en parte, a la diferencia de la naturaleza de los objetos que se estudian y a la organización que ha tomado el cuerpo disciplinar de la matemática. Los subcampos de los pensamientos numérico y métrico están vinculados con la cuantificación, que para el primer caso implica la extensión de las colecciones (cuántos elementos hay en una colección) y para el segundo la extensión de una magnitud (cuánto mide). La acción que corresponde al primer subcampo es la de contar y la del segundo es la de medir. el subcampo de lo espacial y geométrico da cuenta de la localización y de las formas, el subcampo del pensamiento estadístico y aleatorio está relacionado con el manejo de los datos y la incertidumbre y el azar, y, finalmente, el subcampo del pensamiento algebraíco-variacional, está vinculado con el estudio de las relaciones de las variables en situaciones de cambio y con los sistemas simbólicos que se usan para representarlas.

La distinción de estos subcampos no supone un fraccionamiento o una compartimentalización del pensamiento matemático, ya que hacen parte del gran campo del Pensamiento Matemático. Aunque, como se ha dicho, cada uno trata objetos matemáticos diferentes y tienen estructuras que se diferencian de las de los otros; también, pueden encontrarse semejanzas y relaciones entre ellos. Son estas semejanzas las que abren la posibilidad de considerar que los subprocesos que componen el proceso del desarrollo del pensamiento matemático están en estrecha relación.

La estructura de la propuesta curricular se hace sobre la base de aceptar que el centro de atención de la educación matemática es el desarrollo del pensamiento matemático, entendido el pensamiento como la unidad de procesos y contenidos. Con esto se quiere destacar que el papel de la educación matemática es apoyar a los estudiantes para que se apropien de los conocimientos matemáticos que se les enseñan, al punto en que se constituyan en herramientas intelectuales para pensar y actuar. Así por ejemplo, el aprendizaje de la operación suma de los naturales no consiste simplemente en hacerse a unos conocimientos de la suma y resta de los naturales, sino en desarrollar el pensamiento aditivo de los alumnos, a un nivel en el que puedan operar aditivamente con los naturales para enfrentar situaciones problemáticas que se resuelvan satisfactoriamente con la adición y sustracción de naturales. Podría decirse que el pensamiento aditivo sería 'eso' que finalmente va surgiendo en el pensamiento del niño, a medida que va construyendo la operación adición en diferentes situaciones que requieren de las operaciones aditivas. Se trata de la apropiación del conocimiento de tal forma que permita pensar de manera genuina, de forma personal, creativa, crítica y con cierta flexibilidad.

En el documento de lineamientos curriculares (MEN, 1998) se propone relacionar un tipo de pensamiento a un sistema de conocimientos matemáticos, pero esta solución mantiene la dualidad entre el pensamiento y el conocimiento que posee un individuo. Siguiendo a Perkins (1993:37), se afirma que "el objetivo de enseñar las habilidades del pensamiento no se debería considerar, por tanto, como algo opuesto al de enseñar el contenido convencional sino como un complemento de este. La capacidad del pensamiento y el conocimiento son como la trama y la urdimbre de la competencia intelectual, y el desarrollo de cualquiera de las dos cosas en detrimento de la otra, nos produciría algo muy distante de una tela de buena calidad". Esta cita devela la dualidad entre pensamiento y conocimiento en un individuo. El uso del término habilidades de pensamiento hace referencia a esa dimensión estratégica del pensamiento que algunos autores proponen distinguir, pero no es el pensamiento mismo. A propósito del pensamiento numérico y de sistemas numéricos, se dice en los estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (NCTM, 1989) que sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número". Los autores de estos estándares afirman que los niños con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas. Y un poco más adelante citan a Mcintoh (1992): "El pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones". Es en este último sentido que se propone hablar de pensamiento numérico.

Parte del trabajo busca suscitar el debate sustentado sobre esta distinción. Desarrollos posteriores deben ayudar a identificar cuáles son los procesos cognitivos involucrados en la comprensión genuina de los diferentes conceptos que conforman los distintos sistemas matemáticos, cuáles son sus procesos de construcción y cuáles son los énfasis que conviene hacer en este ciclo. Indudablemente debates de este tipo apuntarán a desplazar el énfasis que aún se hace en la presentación de contenidos hacia el desarrollo de las formas de pensar, haciendo uso de las diferentes herramientas matemáticas que las comunidades locales y globales han construido en sus experiencias vitales, en su esfuerzo por comprender el mundo y a sí mismos.

2.5.1. Subcampo del pensamiento numérico

Este subcampo hace referencia a esa parte del pensamiento matemático ligado a los sistemas numéricos. Siguiendo a Vasco, estos están compuestos de esos objetos matemáticos que son los números (en el caso de los tres ciclos: naturales, enteros, racionales y reales), junto con las relaciones que se pueden establecer entre ellos (por ejemplo, relaciones de orden aditivo y multiplicativo) y las operaciones que se ejecutan entre ellos (por ejemplo, las aditivas, las multiplicativas y las potenciativas).

Para potenciar el pensamiento numérico de los estudiantes no basta presentarles sus definiciones y hacer ejercicios de reconocimiento y clasificación de estos. Tampoco basta enseñar los procedimientos para ejecutar operaciones y reglas que establezcan relaciones (como las que se enseñan para determinar si dos racionales son equivalentes o cuándo uno es mayor que el otro), ni enseñar a resolver unos cuantos problemas prototípicos en los que se utilicen estos números, sus relaciones y sus operaciones.

Pensar los números como sistemas es útil en la enseñanza, a condición de no asumirlos como contenidos que hay que presentar a los estudiantes, sino como referencias para potenciar el pensamiento numérico. Se trata de ayudar a construir en sus pensamientos verdaderas herramientas intelectuales, que permitan comprender y actuar en una gran variedad de situaciones que involucren los diferentes tipos de números, para realizar complejas operaciones intelectuales, tales como: dar cuenta de las cantidades; coordinar las diferentes operaciones y relaciones posibles en un sistema con el fin de calcular nuevas cantidades y establecer nuevas relaciones a partir de unas conocidas; manejar diferentes formas de representar los números y transformar unas en otras; hacer estimaciones de la medida de una magnitud y del valor de un cálculo; identificar regularidades; comprender el sentido de una propiedad e identificar los límites en que esta es posible, etc. En síntesis se trata de lograr eso que en educación se ha llamado sentido numérico, son construcciones mentales que permiten comprender y resolver problemas que involucran los sistemas numéricos. Es eso que surge en el pensamiento al operar una y otra vez con significados ligados a situaciones particulares, pero sobre todo con los esfuerzos que se hacen por establecer relaciones entre los diferentes significados para reconocer lo que permanece invariable en ellos. Entre mayor sea la capacidad de los estudiantes para utilizar, en variados contextos, los números en la resolución de problemas novedosos y complejos, mayor será el nivel de pensamiento numérico alcanzado.

Aunque se reconoce que cada sistema numérico tiene sus propias especificidades, en este apartado se hace referencia a algunos componentes que son comunes a los cuatro sistemas numéricos señalados para trabajar en preescolar y básica. Conviene tenerlos en cuenta al pensar y planear su enseñanza.

El concepto de número surge gracias a las relaciones que se establecen y a las operaciones que se realizan entre ellos. Esta idea no es más que una consecuencia inmediata de considerar los diferentes tipos de números como sistemas. Este hecho pone en cuestión la práctica frecuente de enseñar primero la idea de número por aparte, para después pasar al estudio de sus relaciones y sus operaciones. Un niño de preescolar construye la idea de número al enfrentarse repetidamente tanto a problemas de comparación de la cantidad de elementos entre dos colecciones, para decidir si hay más, menos o la misma cantidad, como a problemas que requieran hacer pequeñas composiciones y descomposiciones. En esas situaciones el alumno se va apropiando de instrumentos que lo hacen más eficiente, tales como correspondencia uno a uno, conteo, los signos numéricos, etc.

Las nociones de número, sus relaciones y operaciones se construyen con el esfuerzo de interpretar situaciones que las requieran. Como ya se dijo, no se trata, como muchas veces suele hacerse, de estudiar primero las relaciones y las operaciones entre números, desligadas de situaciones concretas, y después sus aplicaciones. Antes de los significados abstractos se construyen significados ligados a contenidos concretos. El niño de primer ciclo construye las ideas de adición y sustracción enfrentándose a situaciones problemáticas concretas, inscritas en contextos con sentido para él; inicialmente usando procedimientos propios y desconociendo que lo realizado corresponde a operaciones entre números naturales. La comprensión de las operaciones no empieza por conocer las formas de simbolizarlas y los algoritmos para calcular sus resultados; en su lugar, inicia con el desarrollo de un pensamiento que le permite comprender y resolver problemas que involucren esas operaciones.

Apoyar al estudiante para que eleve su pensamiento al punto en el que pueda acceder a representaciones mentales abstractas. Si bien las ideas de los números, con sus relaciones y sus operaciones nacen ligadas a situaciones concretas en las que es útil emplearlas para interpretarlas, estas ideas tienen que desprenderse de esos usos, hasta el punto en que los niños y los jóvenes se las representen de forma abstracta, desligadas de cualquier contexto concreto. Por ejemplo, el pensamiento del alumno debe elevarse hasta el punto en que esté en capacidad de operar con la idea de $3 + 5$ en abstracto y no ligada a la reunión de 3 cosas y 5 cosas. Operar con la idea de $3 + 5$ es mucho más que calcular su resultado, es hacer transformaciones; por ejemplo, si $3 + 5 = 8$, necesariamente $8 - 3 = 5$ y $8 - 5 = 3$; o entender que si $3 + 5 = 8$, entonces $2 + 6$ también será 8, porque 2 es 1 menos que 3, razón por lo que hay que compensar esta transformación del primer sumando agregando al segundo exactamente lo que se le ha quitado al primero; pero también que si $3 + 5 = 8$ necesariamente lo es $5 + 3$.

Si bien la idea de fraccionario nace (aunque no se agota) en contextos de partición (relaciones de partes y todo) y de operadores (en los que se amplían y reducen magnitudes y cantidades y se estudian las relaciones multiplicativas entre las magnitudes y cantidades resultantes y transformadas), hay que elevar el pensamiento del alumno hasta que pueda representarse la idea de fraccionarios en forma abstracta desligada de estas situaciones que le dan origen. El número fraccionario no es simplemente la relación multiplicativa entre la parte y el todo, o tampoco es la de operador, pero estas ideas son un punto de partida para construir la idea abstracta de número fraccionario. Esta idea abstracta no es una definición, es 'eso' que surge en el pensamiento de los niños al operar una y otra vez con estas ideas y con otros significados como el de razón, pero sobre todo con sus esfuerzos por establecer relaciones entre los diferentes significados para reconocer lo que permanece invariante en ellos.

Los significados ligados a situaciones concretas construyen ideas que se convierten en obstáculos para avanzar. Este paso de lo concreto a lo abstracto requiere superar ideas que no son fáciles dejar atrás. Mientras es necesario construir las ideas de los diferentes tipos de números, ligados a situaciones concretas, porque es allí donde los estudiantes asignan significado a las nuevas entidades numéricas que sus pensamientos construyen, estas vinculaciones se tornan en obstáculos (podría decirse obstáculos epistemológicos) que impiden construcciones más abstractas. Estos son los obstáculos que la enseñanza tiene que ayudar a superar. La historia de la construcción de la idea de los números ilustra con claridad estas dificultades y muestra cómo mientras la idea de número permaneció ligada a la cantidad de una magnitud, resultaba imposible darle sentido a un número negativo (¿cómo interpretar el valor negativo de cierta cantidad de una magnitud?). Fue necesario desligar lo positivo y lo negativo de la expresión de cantidades de magnitud y pensarlos como entes matemáticos abstractos para resolver los problemas que esta nueva entidad matemática suponía. Los esfuerzos fallidos por extender las construcciones alcanzadas en los naturales deben ser entendidos como pasos necesarios; cuesta pensar que las ideas de lo positivo y lo negativo pudieran obtenerse sin apoyarse en la idea de número ligado a la magnitud. Realmente fue bajo esta idea sobre la que nació el número.

Mientras un niño permanezca en el mundo de los naturales tendrá que trabajar con la idea de la imposibilidad de las restas en las que el sustraendo sea mayor que el minuendo. En el mundo numérico de los naturales y de los fraccionarios (tomados como mayores que cero) esta es una verdad evidente. Pero es precisamente esta idea la que se constituirá en un verdadero obstáculo para admitir la posibilidad de restar a un número menor uno mayor y que se hace necesaria al operar con cantidades positivas y negativas. Uno de los retos de la enseñanza consiste en encontrar caminos que le permitan a los estudiantes ampliar sus ideas, pero esta construcción solo es posible apoyándose en las construcciones logradas en los naturales. Es claro que este problema no se supera, como con frecuencia suele hacerse, enseñando unas reglas sintácticas (la ley de los signos para la suma de números positivos y negativos) que el niño debe ejercitar hasta lograr dominarlas.

El estudio de las propiedades de las relaciones y las operaciones no se puede reducir a un tema para ampliar la información matemática de los estudiantes. La comprensión de las propiedades, de las relaciones y las operaciones de los diferentes sistemas numéricos, no son simples reglas que se aplican para resolver algunos ejercicios artificiales, sino construcciones incorporadas a la misma idea de número, de relación y de operación que se está construyendo. Un niño de primer ciclo asume la conmutatividad como un fenómeno lógicamente necesario a la misma naturaleza de la adición de esas cantidades que trabaja como parte de sus progresos al operar con los números. En algún momento, al tener que resolver un problema que le implique reunir, por ejemplo, 2 y 7, el alumno preferirá calcular 7 y 2, y considerará esta transformación como natural, aunque no tenga conciencia de que está manejando la idea de la permanencia de totalidad, a pesar de cambiar el orden de los sumandos y aunque no pueda sacar de esa transformación provechos más importantes. Precisamente es función de la escuela ayudar a tomar conciencia de la validez de estas transformaciones, haciéndolo pensar si esto siempre es posible y contrastar este hecho con lo que ocurre con otras operaciones. Pero no sólo eso, es necesario además apoyarlo para que sea capaz de usar esa idea en la resolución de problemas en los que su aplicación resulta potente, como por ejemplo, ¿de cuántas formas diferentes se puede obtener el resultado de 9, al sumar dos números? Estas ideas hay que reconstruirlas una y otra vez cada que se avance a nuevos sistemas numéricos.

La construcción de la idea de número también está ligada a la construcción de la idea de estructura. Se trata de construir una forma de pensar, lograda por la matemática, que es la de *estructura*. Por ejemplo, los estudiantes en el ciclo básica B podrán comprender entidades numéricas más abstractas como los enteros (no los números relativos), los racionales y los reales, en la medida en que los podrán pensar como objetos matemáticos y no como entes ligados a las magnitudes. Aun más, a partir de la idea de la estructura los alumnos podrán darle unidad a la variedad de tipos numéricos, concibiéndolos como extensiones sucesivas a partir de los naturales. La extensión de un conjunto numérico a otro mayor se hace sobre la base de que el nuevo conjunto mantenga las propiedades del conjunto menor, los enteros, aunque tiene propiedades nuevas mantiene las propiedades de los naturales, precisamente porque los enteros los incluyen.

Cada nuevo conjunto numérico supone la reconceptualización de las relaciones y de las operaciones ya construidas junto con la construcción de otras nuevas. El paso de los naturales a los enteros supone abandonar la idea de cero como ausencia de cantidad, para pensarlo como punto de referencia. De igual forma, presume abandonar la idea de número ligada a la cantidad de una magnitud. La construcción de los racionales admite superar la idea de lo discreto para dar cabida a la densidad. La construcción de los reales implica caer en cuenta de dos ideas hasta ese momento inadvertidas: inconmensurabilidad y continuidad.

2.5.2. Subcampo del pensamiento métrico

El desarrollo del pensamiento métrico tiene que ver con todo aquello que está vinculado con el acto de medir. Se miden magnitudes, de hecho se dice que toda magnitud es una propiedad susceptible de ser medida. La variedad de lo que se mide es amplia, al igual que los procesos que se siguen al medir, ya que dependen de la naturaleza de lo que se mide; por ejemplo, existe gran diferencia entre medir una magnitud como la longitud y la intensidad de un dolor. Inicialmente, ese conjunto de hechos, que hacen referencia a la adquisición de la noción de una magnitud, a su medida y a su complejización, es lo que comprende este subcampo.

Los objetos y los hechos tienen algunas propiedades que permiten compararlos por la extensión, es decir, por la cantidad en que ellas se presentan. Para ello se establecen relaciones que permiten afirmar cosas como: "es más…", "es menos…" y "es la misma cantidad de…". Por ejemplo, debido al campo gravitacional que cada objeto genera por su masa, a los objetos se les puede asignar una propiedad llamada peso; esto hace posible compararlos ("A es más, menos o igual de pesado que B”). Así como se tienen propiedades de tipo físico hay otras de tipo espacial como longitud, área y volumen o de amplitud angular. Los eventos que ocurren se pueden comparar con su duración.

De estas propiedades algunas son más universales que otras. Parece razonable que a todos los cuerpos les sea posible asignarle la idea de volumen. Igualmente lo es asignarles la idea de área si se piensa en la extensión de la frontera -o parte de ella- que determina el espacio ocupado por el sólido que se asocia a ese cuerpo, o asignarles la idea de longitud si se piensa en la distancia entre dos puntos determinados sobre su frontera. En cambio la idea de amplitud angular no es tan universal, ya que sólo es susceptible de ser aplicada a un tipo de objetos particulares que son los ángulos, los cuales no son objetos físicos sino de geometría.

Además de comparar objetos o distancias entre objetos, también se comparan hechos, a los eventos se les asignan ciertas propiedades gracias al cambio, al movimiento y a la capacidad que se tenga de registrarlo. Una hace referencia al momento de ocurrencia (cuándo ocurrió), y otra a la extensión o duración de la misma (cuánto duró). Estas dos propiedades son asignables a todos los eventos y por esta razón parece verdadera la afirmación: *“Todos los eventos suceden en el tiempo”.*

A veces es necesario hacer comparaciones de cierta clase particular de hechos, en los que no resulta tan fácil identificar la magnitud que se va a medir y no es muy claro el proceso adecuado que debe seguirse para medirla. Por ejemplo, medir la sensación de “dolor”. Gracias a que los seres humanos pueden tener la sensación de dolor, entienden y utilizan expresiones del lenguaje del tipo “duele más”, “duele menos”; es decir hay unos fenómenos que para algunos efectos sea necesario encontrar procesos que permitan construir escalas para graduar las intensidad de dolor. Es claro que estos procesos de medida son de una naturaleza muy distinta a los de las magnitudes a las que se había hecho referencia anteriormente.

Las nociones de magnitudes como longitud, área, volumen, peso, capacidad o duración, surgen y se complejizan en las comparaciones que se hacen de las propiedades de los objetos y de los hechos, en múltiples y variados contextos y como respuesta a diferentes propósitos. Al comienzo, en ausencia del número y de la medida, las comparaciones son de tipo cualitativo. (mucho, poco, bastante, nada). Un poco más adelante se establecen series que definen un orden de mayor a menor intensidad de la cantidad de una magnitud (como cuando el niño organiza una serie de 10 palitos según su “largo”). Con los progresos en los pensamientos numérico y métrico, las comparaciones llegan a ser cuantitativas, puesto que se hacen en forma extensiva; es decir, la cantidad de la magnitud se define sobre la unidad. Siguiendo a Russell se pueden distinguir dos tipos de cantidades: *las extensivas*, aquellas que son divisibles en un número de veces la cantidad de la unidad o de partes de esta y que son aditivas ($a + a = 2a$); *y las intensivas,* aquellas que no son divisibles ni aditivas, $a + a = a$ (el color rojizo de un frasco de pintura roja se mantiene si en una misma vasija se mezclan dos frascos de esa misma pintura). Magnitudes como longitud, capacidad y duración pertenecen al primer grupo y magnitudes como dolor, olor, pertenecen al segundo grupo.

El proceso práctico de medir las magnitudes del primer tipo consiste en comparar una cantidad dada de magnitud que se toma como unidad con la cantidad de la misma magnitud que se busca medir. Este procedimiento permite asociar un número a esa cantidad de magnitud, pero ese número no expresa la cantidad exacta de la magnitud que se mide, es apenas una aproximación que puede hacerse más cercana a lo que se mide mediante el recurso de fraccionamiento de la unidad. En cambio, las intensivas son muy difíciles cuantificar o medir porque sobrepasan los límites de la aritmética. Precisamente en este punto hay que recurrir al subcampo del pensamiento estadístico y aleatorio, ya que éste permite refinar métodos de ordenar en series y brinda información sobre el grado de estimación alcanzado. Las magnitudes intensivas exigen ampliar el concepto de medir. Se tendría que decir algo como *el acto de medir consiste en hacer comparables, a través de escalas (numéricas o no), cantidades de magnitud del mismo tipo, de forma que las relaciones de orden entre las cantidades de las magnitudes y sus medidas sean las mismas.* Con estas precisiones se dirá que específicamente en este subcampo se hace referencia a ese pensamiento involucrado con la medida de magnitudes extensivas.

Antes de entrar a estudiar el proceso de medir magnitudes conviene hacer una nueva distinción. Existen unas magnitudes como la longitud, el área, el peso, la amplitud angular, etc., que se construyen a partir de la experiencia directa, al comparar las propiedades de los objetos y de los eventos. A estas magnitudes se les puede reconocer como *Primarias*. Existen otras que se construyen a partir de la coordinación de las primeras, por ejemplo, la velocidad de un móvil es construida a partir de la coordinación de la distancia y del tiempo; la presión resulta de coordinar la intensidad de una fuerza y del área de la superficie sobre la que se aplica. Estas magnitudes se llamarán *Secundarias*.

Los siguientes elementos componentes del acto de medir magnitudes extensivas[25] muestran las complejidad de los proceso de medida.

Identificación de la magnitud que se desea medir. Es muy importante en la enseñanza tener presente la idea de que la magnitud es una construcción de la mente. La magnitud longitud no está en los objetos, es construida por los niños y jóvenes a partir de las acciones de comparación entre los objetos que ellos realizan. En los casos de magnitudes compuestas, como cuando se desea expresar la rapidez con la que se desplaza un móvil, puede ser un poco más complejo, ya que como se ha dicho, requiere coordinar la relación entre dos magnitudes: distancia y tiempo. Si un estudiante no posee los recursos cognitivos implicados en esta coordinación, no podrá hacerse al significado exacto de la noción de rapidez y menos darle pleno significado a relaciones entre medidas de ésta. En casos de cantidades intensivas, si se trata de "medir" fenómenos tan "subjetivos" como la confortabilidad de un vehículo, o la intensidad de un dolor, no es tan inmediato determinar cuáles aspectos de estos fenómenos son necesarios y adecuados identificar, que den cuentan de la intensidad de eso que se desea medir, como tampoco, cómo hacerlo y qué instrumento utilizar.

Asignación de un número que expresa la cantidad de la magnitud medida. En el caso de algunas magnitudes, para dar cuenta de la cantidad, qué tanto hay de esa magnitud o qué tan extensa está presente esta magnitud, se toma cierta cantidad de ella en otro objeto o en otro hecho, que se llama unidad (generalmente para facilitar el proceso se toma una cantidad más pequeña que la que se desea medir) y se ve cuántas veces enteras y partes de ésta se necesitan para "cubrir" totalmente (en la práctica casi totalmente) la cantidad a medir. En el caso de otras magnitudes, como

25 COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Serie Lineamientos Curriculares, Bogotá, 1968, p.61-68.

algunas de tipo físico, el procedimiento no se parece tanto a un recubrimiento como cuando se comparan las masas de dos objetos en una balanza o se usa el dinamómetro para comparar el peso.

El número que se asigna a la extensión de la magnitud medida expresa la cantidad de veces que es necesario repetir la cantidad de la magnitud de la unidad y de partes de ésta para obtener una cantidad igual (o en términos prácticos, casi igual) de la magnitud que se mide.

En pocas ocasiones ocurre que con la cantidad de la magnitud de la unidad se logra "cubrir" aceptablemente la cantidad de la magnitud a medir. Si esto ocurre basta utilizar un número natural. Muchas veces se requiere fraccionar[27] la unidad y en ese caso son necesarias las "subunidades" para "cubrir" la cantidad de la magnitud a medir, si la medida se da en términos de la unidad y partes de ésta, no bastan los números naturales, son necesarios los números racionales positivos.

Decisión sobre la unidad adecuada. Esta decisión tiene que ver con el tipo y tamaño de la cantidad de magnitud que conviene tomar como unidad. Se toma sobre la base de la apreciación global de la extensión de la magnitud a medir y de la experiencia ganada en el proceso de medir, lo que permite decidir qué tan apropiado resulta tomar una unidad y no otra.

Cuando se trata de la magnitud longitud, por su carácter unidimensional, en principio la selección del tamaño de la unidad y del patrón conveniente es relativamente simple. La mayor complicación estará exclusivamente en la precisión de la medida. Pero, cuando se trata de medir la extensión de superficies, si se aplica de forma directa la idea de recubrimiento, además del decidir el tamaño de la unidad, también se debe resolver el problema del patrón más adecuado: ¿Qué decisión tomar si la superficie está delimitada por una línea triangular y si esta línea es una circunferencia? En estos casos se da una excelente oportunidad para distinguir entre unidad y patrón. A la unidad de un centímetro cuadrado se le pueden asociar diferentes patrones: un cuadrado de lado de longitud de 1 centímetro, o cualquier otro rectángulo o un círculo de área igual a un centímetro cuadrado. Aunque en el caso del volumen no puede aplicarse físicamente la idea de recubrimiento, puede imaginarse tal acción y en ese caso la decisión del patrón más conveniente presenta problemas semejante a los del área.

Pero el tamaño de la cantidad de magnitud tomada como unidad, también tiene que ver con factores prácticos que determinan la precisión requerida. Si se necesita alta precisión será conveniente tomar unidades pequeñas.

Precisión y exactitud de la medida. En términos prácticos, el hecho de medir se puede considerar como un proceso en el que se busca aproximarse a la cantidad a medir, tanto como sea deseable y posible. A medida que se hagan más subdivisiones, las subunidades serán más pequeñas y por lo tanto se podrá aproximar más, de manera que el número que se asigna como valor de la medida es más próximo al que sería en caso de medirse "exactamente". Asociar un número con la cantidad de una magnitud no es más que una aproximación, y la cantidad real está en un intervalo que puede hacerse tan pequeño como lo permita la precisión del instrumento.

Construcción de instrumentos. Una vez definida la unidad, se construyen instrumentos para facilitar el acto de medir. Uno

27 Es dividir en un número de veces exacta la unidad. De ahí que al repetir la subunidad obtenida el número de veces en el que se dividió la unidad "cubre" exactamente la cantidad de la cantidad de la magnitud que corresponde a la unidad.

de los instrumentos para medir longitudes es la *cinta métrica*, que no es más que una cinta en la que aparece la unidad metro, con sus subdivisiones en submúltiplos hasta donde se desee, según la precisión que se busca. Un marco de madera de forma cuadrangular y de un metro de lado, podría ser el instrumento para medir superficies aunque estos ya no resultan necesarios, gracias a que los problemas de medir superficies se pueden reducir a cálculos que requieren la medida de longitudes. Un instrumento para medir pesos es el *dinamómetro*. Su principio radica en establecer correspondencia entre fuerzas y longitudes que se traducen a una escala. En éstos como en muchos otros instrumentos está presente el manejo de escalas. Y hay que tener en cuenta que la comprensión de la construcción y lectura de muchas de estas escalas, involucran el pensamiento proporcional.

Ya señalada la complejidad del acto de medir magnitudes extensivas, ahora se destacan algunos referentes que conviene tener presentes al pensar y planear la enseñanza, para promover la complejización del pensamiento métrico de los estudiantes.

Las nociones de las magnitudes surgen de acciones en la que se intenta medir. Si medir es dar cuenta de la cantidad de una magnitud, es necesario entonces que se construya la noción de la magnitud que se busca medir. Pero estas nociones sólo pueden surgir a partir de múltiples experiencias en las que los niños deban comparar los objetos y los hechos por alguna propiedad común. En el primer ciclo el niño empezará haciéndose a ideas como el largo de una piola o un palo, o la distancia entre dos sitios, en variados problemas que él intenta resolver, en compañía de sus compañeros y con el apoyo del maestro al interior de muchas actividades en las que necesita hacer comparaciones. Poco a poco construirá una noción como "largo", una idea imprecisa y si se quiere ambigua, que será el punto de apoyo para construir la noción abstracta de longitud. De forma semejante surgen las otras nociones de área, volumen, peso, tiempo, masa, temperatura, etc.

El punto de entrada para la construcción de estas nociones es entonces, la acción de comparar las cantidades de una misma magnitud y no el conocimiento de las unidades de medida. Cada vez con mayor insistencia la literatura en educación matemática pone en evidencia los pocos efectos que produce para el desarrollo del pensamiento métrico de los estudiantes, limitarlos al aprendizaje de los sistemas de medida, es indudable que las prácticas de medir potencian más su pensamiento. En el ciclo de educación básica A poco se aporta al niño, limitándolo al aprendizaje de cálculos de áreas, volúmenes y sistemas de unidades, como camino para acceder a las ideas de superficie y área; en cambio, parece mejor empezar por ayudarlo a vivir experiencias en las que sea necesario comparar la extensión de dos regiones y buscar métodos cada vez más eficientes para hacerlo. A través de estas vivencias los niños llegan a ideas intuitivas de la magnitud que se mide y de los procedimientos. Enseñar los sistemas de unidades es fundamental, pero esto tiene sentido cuando el alumno ha ganado algo a nivel intuitivo.

De la cuantificación cualitativa a la cuantitativa. Para comparar varios objetos o eventos según una magnitud, lo niños empezarán por realizar acciones que le permiten decir "…es más…", "…es menos…"; "es igual…". Poco a poco pasará de hacer comparaciones entre dos o tres objetos a ordenar colecciones de más de tres elementos. A medida que avanza podrá hacer comparaciones no directas sino mediante un tercer elemento que toma como a manera de unidad. Estas acciones lo llevarán al uso de patrones, lo que le abre el camino a la medida propiamente dicha.

La necesidad de la conservación de la cantidad de una magnitud. Los primeros esfuerzos de cuantificación del niño pequeño están soportados exclusivamente sobre la información que le brinda la percepción, de ahí los típicos errores cuando consideran que la cantidad de una magnitud puede cambiar debido a variaciones en la configuración del objeto que se mide (la cantidad de plastilina de un bola cambia si se altera su forma). Aunque el alumno del ciclo de educación básica A ya está en condiciones de controlar con su pensamiento los datos de la percepción en el caso de las magnitudes como los elementos de una colección, o la cantidad de masa, muy seguramente todavía considerará que el área de una región pueda cambiar por variaciones en la posición o por configuraciones diferentes de fracciones de ella, como cuando hace construcciones con el tamgram. Si bien la conservación no es una noción previa a la construcción de la misma noción de una magnitud y a su medida, si es necesaria para su consolidación; razón por la que en la enseñanza de toda magnitud y en todos los niveles, la enseñanza debe apoyar al estudiante para que la construya.

De las unidades no convencionales a las convencionales. La experiencia de construir unidades de medida no convencionales para alguna magnitud por parte de los alumnos, permite construir fuertes intuiciones sobre la noción de magnitud y sobre el problema de medir. Introducir las unidades convencionales sin más, muchas veces no brinda la posibilidad a los estudiantes de hacerse a la naturaleza de la unidad y del proceso que está implicado en la medición de la magnitud. El uso del reloj, para medir en minutos o segundos la duración de un evento, no deja ver el hecho importante de que para medir la duración de un evento, se toma como referencia la duración de otro evento periódico. El uso de una unidad como el metro cuadrado y peor aún, la introducción directa al cálculo del área por medio de una fórmula, por ejemplo de un rectángulo o de un triángulo, oculta la idea de recubrimiento que está presente en estos casos y especialmente las grandes dificultades que se tienen que superar para hacer los recubrimientos "exactos". Hay otras razones más para trabajar unidades no convencionales, estas experiencias brindan excelentes oportunidades para ilustrar la necesidad de establecer acuerdos sobre las unidades que se utilizan en un grupo social.

La estimación de la medida. Parte esencial del desarrollo de una fuerte intuición sobre la medida, está en la capacidad de estimar la cantidad de una magnitud, capacidad que se gana con la experiencia, ésta brinda referentes sobre los que se pueden hacer apreciaciones de lo "grande" o "pequeño" que es una unidad, o de la cantidad de una medida. Siguiendo a Segovia y otros (1989) se dirá que el desarrollo de la estimación consiste "en crear una base de información sobre la valoración de los datos, análisis de su credibilidad y control de su validez, que contribuya a educar las intuiciones más o menos espontáneas de los alumnos y a organizar sus experiencias, de forma que se disponga de una base rica en información para cuando el alumno tenga que iniciar un estudio sistemático sobre cálculo numérico y estadístico". Esta base de información es la que tiene que ayudar a enriquecer la enseñanza. A medida que los estudiantes construyen herramientas más elaboradas sobre la medida, se les podrá ayudar a controlar el grado de aproximación de sus mediciones, determinando el margen de error cometido y sobre todo el grado de precisión y exactitud que en un contexto determinado es necesario y conveniente.

Construcción y manejo de instrumentos. Se ha dicho que el acto de medir involucra los instrumentos que se utilizan. Los estudiantes ganan comprensión de la medida cuando aprenden a usar los instrumentos que comúnmente se usan para medir diferentes magnitudes; de ahí la importancia que a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, de acuerdo con el grado escolar, se tengan experiencias en las que se hagan prototipos de estos instrumentos y se familiaricen con su uso.

Todo instrumento supone la construcción de escalas. Muchas de las escalas que se usan, se construyen a partir de establecer relaciones de proporcionalidad entre las variaciones del valor de la magnitud, del objeto o hecho que se utiliza para la medición y la escala que se construye para hacerla. Una cinta métrica puede considerarse como una escala que guarda correspondencia 1 a 1 entre segmentos de la escala y valores de la magnitud medida; un dinamómetro establece una relación entre cada unidad de la escala y cada unidad de estiramiento de un resorte y cierta cantidad de peso. Es importante que los estudiantes tengan experiencias de construcción y manejo de diferentes instrumentos y se les ayude a comprender las relaciones matemáticas que estos involucran.

2.5.3. Subcampo del pensamiento espacial

Este subcampo incluye esa parte del pensamiento vinculada a las experiencias con los objetos físicos,[28] sus representaciones gráficas y simbólicas cuando se hace referencia a su localización, a sus cambios de posición, a sus formas y a las modificaciones de estas. De acuerdo con Vasco (2006), "el pensamiento espacial definido como el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales, contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan las creación y manipulación de nuevas representaciones mentales".[29] El profesor Federici insistía en una noción relacional del espacio; decía que los objetos están dispuestos en el mundo y que los humanos establecemos relaciones entre ellos para dar cuenta de sus posiciones y de los cambios de éstas. Este sistema de relaciones es lo que hace referencia a la noción que los sujetos construyen de espacio. Tal forma de entenderlo es importante para la enseñanza porque destaca el carácter constructivo del pensamiento espacial. Por una parte pone de relieve que este no es resultado de impresión de imágenes fruto de experiencias con los cuerpos, de sus formas y de sus posiciones, sino de operar con las relaciones que se establecen entre ellas,[30] y por otro lado, que para movilizar el desarrollo del pensamiento espacial, la enseñanza debe orientar su esfuerzo en enriquecer la experiencia y la reflexión de los estudiantes con el espacio.

En Colombia, a partir de la renovación curricular se viene insistiendo en el enfoque

28 Para este caso el propio cuerpo y el de los otros son considerados como otros objetos físicos.

29 Ibid., Vasco, C. MEN (2006).

30 Para ser más exactos, habría que decir que las mismas percepciones no son meros registros en nuestras mentes de lo que vemos, sino verdaderas construcciones producto de la interacción entre lo que ya poseemos en nuestras mentes y lo que percibimos.

de geometría activa. Ésta consiste en "la exploración de la figura mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, (como cuando el niño recorre la frontera de una figura) y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos" (Vasco,1994). Pero quizá los efectos producidos en las prácticas de enseñanza están distantes de las ideas planteadas en este enfoque. La interpretación que se hace del componente activo que se propone en la enseñanza se reduce a manipulaciones orientadas más a apoyar la percepción de formas que a la exploración activa y a la reflexión sobre las acciones y sus resultados. Aún, en muchos casos se sigue insistiendo demasiado en la transmisión de contenidos, aunque ahora dicha transmisión se enmascare apoyándose en la manipulación y la visualización.

El desarrollo del pensamiento espacial es un proceso lento y se nutre de las experiencias que las personas tienen del mundo material, simbólico, social y cultural; pero en este caso como en ninguno otro, -o quizá comparable con el pensamiento físico-, las experiencias con el mundo de los objetos se constituye en un soporte intuitivo mayor. Los humanos construimos un espacio práctico como resultado de las acciones que hacemos sobre y con los objetos del mundo. Desplazamos objetos y nos desplazamos de un sitio a otro. Para dar cuenta de nuestra localización y de los objetos construimos sistemas de referencia. Al comienzo, de niños, únicamente estamos en capacidad de usar sistemas referidos al propio cuerpo o a objetos que están en el mismo lugar y cercanos a nosotros, por eso estos sistemas son muy locales y fragmentados. Poco a poco nos hacemos capaces de usar objetos muy conocidos (la casa en la que vivimos, el parque, la escuela) para utilizarlos como referencia en espacios más amplios. Pero la coordinación de un sistema de referencia con otro es parcial.

También transformamos y representamos los objetos, y modificamos sus posiciones aunque no los desplacemos. Algunas acciones que hacemos sobre los objetos modifican su forma y su tamaño. Hay otras acciones que mantienen la forma pero no el tamaño u otras que mantienen ambas. Aunque de pequeños no seamos conscientes de estos hechos, los utilizamos en muchas acciones prácticas. Desde pequeños comparamos propiedades de los objetos que dan cuenta de su tamaño o del de algunos de sus componentes, aunque al empezar sea de forma rudimentaria. Poco a poco introducimos procedimientos que nos permiten independizar paulatinamente las comparaciones de la valoración perceptiva. Más adelante con los progresos en la medida logramos comparaciones más refinadas. Los conceptos *de micro-espacio, meso-espacio* y *macro-espacio* introducidos por Grecia Galvez (2001) aportan para comprender el alcance de estas construcciones.

Desde muy pequeños intentamos construir objetos conocidos y presentes, pronto podemos representar objetos ausentes mediante modelos físicos (tipo maquetas) y/o dibujos. En un comienzo estas representaciones son incompletas e imprecisas, pero, poco a poco logramos mejorarlas.

Estas adquisiciones nos hacen relativamente eficientes para vivir en el espacio, así sea local, sin necesidad de mayor instrucción formal. Este es un espacio práctico o empírico, pero cualquiera de las dos permite realizaciones con cierto grado de complejidad, que van mucho más allá de desplazarnos entre dos sitios conocidos, sin perdernos y de poder imaginarnos el camino. Por ejemplo, podemos imaginarnos la acción de cortar una tabla de forma cuadrada por una de sus diagonales y anticipar la forma y el tamaño de los dos pedazos. Para resolver este problema a nivel práctico no se necesita conocer el nombre de la forma de la tabla y menos de la línea de corte; simplemente el apoyo intuitivo de muchas acciones ofrece la evidencia necesaria para anticipar este resultado, e incluso da la certeza de que se cumple para todos los casos. Este espacio práctico se va complejizando con mayor capacidad de representarlo y de coordinar acciones para obtener resultados más avanzados. Este es un proceso en el cual la enseñanza escolar juega un papel importante, ya que apoya al estudiante en la apropiación de las herramientas de pensamiento que brinda la geometría. Un carpintero, incluso si es iletrado, da muestras de una profunda capacidad de representarse mentalmente el mueble que va a construir, del número de piezas que lo conformarán, de sus formas y sus tamaños, aunque si le pidiera que lo dibujara, su "croquis" poco respetaría los principios de la perspectiva y de las proporciones. La progresiva geometrización de este espacio permite construir un espacio abstracto y conceptualizado,[31] que produce entidades teóricas representadas simbólicamente, para las cuales ya no podemos construir imágenes mentales, como por ejemplo: ¿cómo tener imágenes mentales de un espacio de 5 dimensiones?

De lo anterior se desprende que el niño llega al colegio con construcciones importantes sobre el espacio. El papel de la escuela consistirá en reconocerlas y enriquecerlas. Habría que preguntarse si lo que está ofreciendo logra potenciar el pensamiento espacial de los alumnos, tanto como es posible y deseable. Quizá el camino para brindar información temprana sobre la geometría no sea el más eficiente. Los estudios en educación matemática muestran los pobres resultados que alcanzan los alumnos en la estructuración de su pensamiento espacial, cuando se asume la enseñanza de la geometría como la entrega de información que él debe aprender. El ya clásico estudio de lo esposos Van Hiele (1957) muestra los escasos logros alcanzados; en su modelo de cinco niveles la mayoría de los estudiantes se ubican en alguno de los tres primeros.

2.5.3.1. Componentes del pensamiento espacial

Aunque la literatura es dispersa en relación con posibles componentes del pensamiento espacial, se propone pensar el desarrollo de este pensamiento en tres componentes: localización, estudio de la forma e inferencia y validación. Con esto se busca estructurar la diversidad de experiencias convenientes para promover en los estudiantes el pensamiento espacial; quizá estos no sean suficientes, ni sea ésta la clasificación más adecuada; la investigación y el debate aportarán elementos para mejorar esta propuestas.

La localización. Tiene que ver con la capacidad de dar cuenta de la posición relativa de los objetos; para tal fin, se construyen sistemas de referencia. Al comienzo, estos sistemas cada vez involucran pocos elementos, a veces sólo dos objetos, como cuando se establecen relaciones del tipo: "estar cerca (o lejos) de…", "estar más cerca (o más lejos) de…", "estar a la derecha (o la izquierda) de", "estar arriba (debajo de…)". Un síntoma de progreso en este sentido está dado por ser capaz de coordinar relaciones entre tres o más objetos.

Un sistema de referencia privilegiado es el brindado por el propio cuerpo. A medida que

31 Sería más exacto decir "permite construir diferentes espacios".

el niño progresa en el dominio de su esquema corporal, utiliza tres ejes de su topografía corporal para ubicarse y orientarse en el espacio: arriba-abajo, delante-atrás, derecha-izquierda. Inicialmente, estos ejes son utilizados por separado (relaciones en una dimensión) y progresivamente puede coordinar dos de ellos (relaciones bidimensionales, sobre un plano: "…está adelante y a la derecha de…"). Hay que esperar mucho tiempo para que el estudiante sea capaz de integrar los tres (relaciones tridimensionales). De la capacidad de utilizar el propio cuerpo como marco de referencia, se progresa hacia el uso del cuerpo de otros y otros objetos como marco de referencia. Estos sistemas de referencia ligados al sitio presente han de ser ampliados progresivamente para incluir espacios mayores y objetos no presentes. De la capacidad de establecer relaciones y de operar con éstas en el campo de la misma acción, es necesario pasar a ser capaz de operar con representaciones icónicas y poco a poco sobre representaciones del lenguaje. Estos progresos no se agotan en el primer ciclo. Habrá que apoyar a los estudiantes del ciclo de Educación Básica A para que construyan sistemas de referencia más universales, como el sistema de posición geográfica (el de los puntos cardinales). En el ciclo de Educación Básica B se les apoyará para que manejen sistemas de posicionamiento global; incluso con los progresos en geometría llegar a dominar los sistemas de coordenadas cartesianas e incluso sería deseable al finalizar la secundaria que los alumnos se familiarizaran con las coordenadas polares.

Los primeros sistemas de referencia carecen de la medida, de la distancia. De sistemas que sólo incluyen relaciones como "está más lejos (más cerca) que…", se debe pasar a sistemas que expresen relaciones como "está a 5 metros de" y a sistemas bidimensionales en los que aparezcan relaciones más complejas como: "está 5 metros a la derecha de y 4 metros adelante de …". Las acciones de elaboración e interpretación de croquis, planos, maquetas ayudan a los estudiantes a ganar y mejorar su capacidad de coordinar dos y tres dimensiones.

El estudio de la forma. En el espacio físico nos enfrentamos a objetos en tres dimensiones. Con la exploración activa de estos cuerpos se construyen representaciones mentales de las figuras tridimensionales, bidimensionales, de las líneas y de los puntos. Este texto de Vasco es ilustrativo al respecto:

> Al pasar las manos por las caras o superficies de objetos, muebles y paredes se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies, y entre superficies planas y curvas. La interrupción del movimiento prepara el concepto de superficie como frontera de un cuerpo, y el movimiento de la mano prepara el concepto de plano, el de región y el de área.
>
> Al pasar el dedo por el borde común de dos superficies se aprecia la diferencia entre superficie y línea y entre línea recta y curva, y se prepara el concepto de longitud y el de prolongación de una línea en la misma dirección y sentido del movimiento del dedo. La interrupción del movimiento prepara el concepto de línea como frontera de una superficie, y el movimiento del dedo prepara el concepto de línea recta, el de segmento y el de longitud.
>
> Al terminar el recorrido de un borde que termina en punta, esa interrupción del movimiento prepara el concepto de punto. Se sugiere la prioridad del cuerpo sobre la superficie, de ésta sobre la línea y de ésta sobre el punto.[32]

32 COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, ibid. Págs. 53 y 54.

Se ve que la representación mental de una figura no se reduce a la imagen mental cosificada producto de la percepción directa de una forma global. Es, más bien, un esquema mental en el sentido estricto de Piaget. Se trata de propiciar la construcción de esquemas dinámicos con los cuales se puedan imaginar transformaciones y operar con ellas.

Estas construcciones aunque importantes, no son suficientes para avanzar en la geometrización. A medida que se identifican los elementos, hay que establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, no basta reconocer la forma rectangular y distinguirla de otros cuadriláteros, o reconocer los elementos que la constituyen; es necesario ir más allá estableciendo relaciones entre las condiciones de ángulos rectos, de paralelismo y de igualdad de las longitudes entre pares de dados. También es preciso establecer relaciones entre figuras. No basta estudiarlas unas separadas de las otras. Por el contrario, se requiere ayudar a los estudiantes a reconocer cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que determinan una figura; cuáles transformaciones cambian una en otras; cuáles elementos permanecen y cuáles no, cuando se hacen determinadas transformaciones. Las clasificaciones de la figuras son importantes, siempre que estas no se aborden como simples taxonomías a memorizar, sino que resulten de la capacidad de los alumnos para hacer inferencias a partir de las operaciones entre las relaciones que establecen entre sus componentes.

El estudio de las transformaciones sobre las figuras es un componente fundamental para el estudio de las formas. Ellas tienen que ver con la exploración activa de los efectos que se producen al realizar movimientos o cambios en las figuras.

En la actualidad, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo…Esta propuesta [la de geometría dinámica] intenta devolver la dinámica a los sistemas geométricos con sus operadores y transformaciones, que resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Esto quiere decir que una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos…

Cuando se estudien estos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Con esto se llega primero a las rotaciones y a las traslaciones. Se trata de ver qué tipo de movimientos conservan la dirección, cuáles la orientación en el plano o en el espacio, cuáles cambian los órdenes cíclicos de los vértices sin definir verbalmente ninguna de estas transformaciones.[33]

De igual forma, es importante para el estudio de la forma la construcción de figuras con el uso de instrumentos (compás, regla, etc.), ya que el acto de dibujar permite visualizar relaciones entre los elementos involucrados en

33 Vasco, Carlos, citado en: "Matemáticas. Lineamientos Curriculares". Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

la figuras, al igual que el uso de los software que promueven la geometría dinámica, ya que exigen un tipo de construcción que favorecen la visualización de las relaciones que están en juego (Laborde 1996).

Inferencia y validación. El primer modelo teórico de corte deductivo que se conoce en la historia no solo del conocimiento matemático sino del conocimiento humano, es el modelo de Euclides. A pesar de las sospechas sobre su consistencia lógica, por muchos siglos las generaciones de matemáticos lo reconocieron como excelente ejemplo de construcción lógica. Aún se le reconoce así, aunque se tenga claridad de sus vacíos y se cuente con modelos axiomáticos que lo perfeccionaron. Quizá esta sea una de las razones por las que se considere que el estudio de la geometría es un campo privilegiado para el desarrollo del razonamiento deductivo.

Junto a las razones de tipo histórico al considerar la geometría como campo privilegiado para el desarrollo del razonamiento deductivo, están las de tipo psicológico. Se ha dicho que el pensamiento espacial goza, como pocos, de fuertes soportes intuitivos. Este hecho facilita que el estudiante logre hacer inferencias sencillas a partir de manipulaciones de objetos y de sus representaciones gráficas; y que una vez hechas estas, pueda construir argumentaciones prácticas con las cuales busca validar sus afirmaciones y en las que es posible apoyarlos para que superen la simple verificación empírica, aunque inicialmente se apoyen en ellas. “La geometría euclideana es un campo muy fértil – aunque no el único- para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo la deducción formal a partir de axiomática, por tener una articulación óptima entro lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y académico” (Vasco C, 2006).[34] En otros subcampos del pensamiento matemático, los estudiantes también pueden hacer inferencias, pero sus intentos de validación fácilmente caen sobre la verificación, debido a que requieren elementos teóricos que les resultan difíciles. No se trata de enseñar la geometría mediante teoremas y sus demostraciones, pero sí de estimular a los alumnos a investigar, a producir enunciados claros y precisos en los que den cuenta de sus hallazgos. Que puedan, cada vez con más rigor, acercarse a demostraciones sencillas, soportándose en unas relaciones que, aunque no se han demostrado con anterioridad en el curso, por alguna razón ya son aceptadas como verdaderas.

34 Ibid., Pág

2.5.4. Subcampo del pensamiento algebraico-variacional

Este subcampo está relacionado con el desarrollo de esa parte del pensamiento involucrado con el estudio de la forma de variación de dos o más conjuntos de números o magnitudes. Tiene que ver con esa parte del pensamiento matemático vinculado con el hecho de estudiar fenómenos reales o imaginados en los que es posible identificar dos o más magnitudes y estudiar la forma como varían una o varias en función de una o varias de otras. Esto significa que el pensamiento variacional nace en el estudio de situaciones de variación y, nuevamente aquí hay necesidad de repetir lo ya dicho en los otros subcampos, este pensamiento no emerge del estudio más o menos formalizado de algunas nociones vinculadas con el concepto de función.

Es útil distinguir algunos componentes del pensamiento variacional, que conviene ir consolidando en los estudiantes desde que inicia el preescolar.

La apropiación de un método para estudiar la variación. Los fenómenos del mundo real (naturales, sociales, económicos, etc.) son complejos, en ellos intervienen distintas magnitudes, de forma que los efectos observables son fruto de la confluencia de las variaciones de esas magnitudes. Como resulta difícil establecer de una vez relaciones que vinculen a todas ellas, un recurso metodológico consiste en aislar dos magnitudes, tratando de mantener constante o minimizando los efectos de las otras no seleccionadas. Estudiar la forma como varían las magnitudes, es estudiar variables, una de éstas (que se toma como variable dependiente) varía cuando la otra toma diferentes valores (variable independiente). A partir de las relaciones entre pares de variables (V_i, V_j, V_k...) se puede inferir la variación de una variable V.

Aunque la compresión y manejo de este recurso metodológico es complejo, desde temprana edad los niños pueden participar en pequeños experimentos en los que toman y registran datos sobre dos magnitudes para dar cuenta, a través de representaciones en tablas o dibujo de los valores tomados, para empezar a acercarse a la idea de poner en relación dos magnitudes y analizar cómo los valores de una dependen de los valores de la otra.

Construcción y comprensión de modelos de variación. Se trata de ayudar a los estudiantes a comprender que en muchos casos en la forma como se relacionan las variaciones de dos magnitudes se puede identificar una regularidad en la variación, que esa regularidad puede expresarse mediante alguna forma de representación[35] y que ésta puede utilizarse para obtener valores nuevos a partir de unos ya conocidos.

Algunas de estas formas de variación con alguna frecuencia se repiten en fenómenos de contenidos distintos, por lo que se pueden tener algunos modelos de variación con los que conviene que los estudiantes se familiaricen (lineal, polinómicos, exponencial, etc.).[36] El que fenómenos distintos puedan interpretarse con un mismo modelo de variación permite descubrir nuevas regularidades. Una regularidad en un plano superior, ya no entre las variables de un sistema particular y específico, sino entre distintos sistemas particulares. Hay aquí un nivel superior de abstracción, montado no sobre valores de una magnitud sino sobre formas de variación (la forma como varía lo que se paga por el transporte de personas cuyo valor unitario es el mismo para todas; la forma como varía el área de un rectángulo con relación a la longitud de su altura cuando permanece constante la longitud de su base; la forma como varía la presión que ejerce un gas en un recipiente cerrado cuando cambia la temperatura que este tiene; en todos estos casos, diremos que hay una relación directamente proporcional).

Compresión y manejo de diferentes sistemas de representación. Para expresar la variación se utilizan distintos registros (lenguaje común, tablas, gráficas y algebraicos). Conviene que los estudiantes logren expresar con claridad y precisión algunas formas de variación en los diferentes registros y ganar habilidad para convertir lecturas de un registro a otros. En este proceso el alumno ha de ser capaz de dar significado a las escrituras particulares que se utilicen y dar cuenta de la forma de variación según los elementos de la situación

35 Estás formas pueden ser las expresiones verbales, tablas, gráficas y símbolos.

36 No existe un acuerdo con relación a cuál de los modelos conviene enseñar en la educación básica y cuál es la profundidad con la que han de abordarse. Este es un punto en el que convendría que se debatiera en las comunidades de educadores matemáticos para obtener acuerdos básicos. Los estándares curriculares fijan para noveno grado el estudio de variaciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. A juzgar por los resultados de las investigaciones existentes en educación matemática podría pensarse que están muchos más allá de las construcciones que un alumno de básica podría alcanzar.

(por ejemplo, variaciones de la inclinación de la semirecta que se obtiene como gráfica cartesiana en el caso del área del rectángulo citado anteriormente, significa variaciones en el valor de su base).

El registro algebraico es el sistema de signos más importante para expresar la variación, por que es sucinto y es una forma potente de comunicar ideas complejas y abstractas;[37] además, por que al posibilitar hacer transformaciones de una expresión a otra equivalente, siguiendo las reglas sintácticas del sistema, se pueden inferir relaciones nuevas,[38] a partir de unas ya conocidas. Se propone ligar el estudio del sistema de representación algebraico a la variación, en todos los niveles de la educación básica, ya que es la variación la que permite apreciar que las representaciones algebraicas son formas de representación simbólica de relaciones generales. Poco a poco conviene incrementar la capacidad de hacer manipulaciones operatorias de expresiones algebraicas sujetándolas a la variación y al estudio de diferentes problemas en los que el estudiante se apropie de la función de herramienta que ellas tienen para interpretar hechos.[39] En educación básica es más favorable orientar el estudio de las representaciones algebraicas ligadas a la interpretación de variaciones y la búsqueda de nuevas relaciones posibles, que como estudio formal y abstracto. Muchos estudios muestran las grandes dificultades que los estudiantes tienen para pasar las transformaciones que hacen sobre las expresiones algebraicas en las reglas que rigen la sintaxis de un sistema. Generalmente cuando logran cierta habilidad para ejecutarla lo hacen por la vía del entrenamiento.[40]

Una representación simbólica no se constituye en algebraica por el simple hecho de incluir letras que representan números que se combinan con las operaciones posibles entre los números; si el estudiante no es capaz de captar las relaciones generales que ellas expresan es un simple simbolismo. En

37 Una expresión simbólica como $d=gt^2/2$ es una forma muy sintética de expresar que "la distancia recorrida por un cuerpo que se suelta y cae libremente depende del cuadrado del tiempo transcurrido, con una constante de variación igual a la mitad de aceleración que el campo gravitacional ejerce en el sitio en el que se produce la caída". Se entiende que así como hay economía, también hay mayor complejidad para extraer el significado allí inmerso. Si de este simbolismo no puede extraerse ese significado, independientemente de que se pueda expresar de forma completa y correcta verbalmente, tal expresión no tiene sentido.

38 Piénsese en lo que ocurre con un problema simple como el que a partir de aplicar el teorema de Pitágoras se puede expresar la longitud del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de la radio r. Un vez que se tiene el resultado y a partir de la expresión del área del cuadrado, con una manipulación simple se puede obtener una nueva relación entre el área del cuadrado y el radio. Pero lo interesante aquí no es tanto que mediante el nuevo resultado se pueda tener una fórmula para calcular el área de cuadrado a partir del radio de la circunferencia en el que éste se inscribe, sino que la expresión algebraica permite decir que "entre el área del cuadrado inscrito y el radio de la circunferencia existe una relación de proporcionalidad". Si se duplica el radio de la circunferencia también se duplica el área del cuadrado. $L = 2R$.

39 Aquí los recursos computacionales son de vital importancia para que los estudiantes visualicen el dinamismo de estas representaciones.

40 Muchos estudios muestran los escasos logros que se alcanzan cuando se busca que los estudiantes accedan al algebra por la vía de lo que se ha llamado "una aritmética generalizada". Muchas de las manipulaciones que los alumnos logran hacer de las expresiones numéricas se basan más en las intuiciones de la certeza de la validez de la manipulación que la conciencia de que esté aplicando un regla sintáctica que se los permita. Cuando un educando muestra dos caminos correctos para resolver un problema ligado a un contexto en el que el profesor pueda identificar que son equivalentes porque la existencia la propiedad distributiva, no significa que el estudiante sea consciente de ello, simplemente lo hace basándose en los significados concretos que el contexto le permite dar a los números y las operaciones que realiza. Pasar de la capacidad de encontrar por dos caminos distintos el valor total que se paga por las 5 unidades de un artículo A y 5 unidades de un artículo B, siendo los valores unitarios de A y B diferentes: uno consistente en calcular las multiplicaciones de 5 por el valor unitario de cada artículo para después sumar los resultados obtenidos y el otro, suma los valores unitarios para después multiplicar por 5, no significa que el estudiante sea consciente de la aplicación de la distributiva de la multiplicación respecto a la adición. Pasar de esta capacidad a la de aplicarla para encontrar y comprender la equivalencia ente $5a + 5b$ y $5(a+b)$, siendo a y b representaciones de números cualesquiera, supone una gran capacidad generalizadora del pensamiento, un pensamiento formal que apenas está en ciernes. Estos saltos, o mejor malabarismos cognitivos que se le exigen a los estudiantes son los responsables de los escasos logros que ellos alcanzan.

gran medida esto pueda explicar la gran dificultad que ellos tienen, incluso en educación superior, para usarlas como herramienta en el estudio de relaciones entre las magnitudes que intervienen en un hecho. La fórmula simple para calcular el área de un triángulo de base y altura, puede verse como una expresión simbólica que representa la variación entre la variable dependiente área y dos variables independientes base y altura,[41] pero también puede verse simplemente como una expresión comprimida de representar un procedimiento para calcular el área de un triángulo. Este último significado es generalmente el que se trabaja en la mayoría de los casos; con una representación mental, así no es claro, cómo puede el estudiante pasar al problema de expresar el área de un triángulo equilátero en función de su lado. Hacer uso de las letras que aparecen en las expresiones algebraicas como números desconocidos es limitar su comprensión. No es muy claro que este significado sea una fase obligada por la que pasan los alumnos al avanzar en su pensamiento algebraico-variacional, o más bien es fruto de la forma como se acercan al álgebra.

De una representación mental dinámica al reconocimiento de una estructura. Se ha insistido en la importancia de ayudar a los estudiantes a representarse mentalmente las expresiones algebraicas como forma de variación, pero es necesario ir más allá, en ellas también hay que reconocer la representación de la estructura de una variación. La forma de variación expresada por Y = 3X es la representación sintética de un modelo de variación entre las dos variables, por lo tanto también tiene que surgir en la mente de los estudiantes que esta expresión muestra la estructura de la variación. Esta representación mental ya no está ligada a imaginarse los cambios particulares, ya es elevada a un ente abstracto que tiene significado por sí mismo.

41 La representación gráfica de esta relación no es tan sencilla, ya que pone en juego tres variables; exige un sistema de tres coordenadas y su forma será la de una superficie. Pero puede simplificarse si se hace constante una de las dimensiones

2.5.5. Subcampo del pensamiento estadístico y aleatorio

Actualmente se asiste a una etapa de desarrollo acelerado. El mundo cambia a pasos agigantados, tanto en la ciencia como en la tecnología. Con la construcción de computadores cada vez más potentes y el avance de los sistemas de transporte y el mejoramiento de los procesos de comunicación, estamos enfrentados a un mundo saturado de información. El conocimiento científico ha consolidado nuevos modelos de explicación, más holísticos, en los que las teorías deterministas ceden terreno a principios basados en la incertidumbre. Para buscar, organizar e interpretar la información, y además tomar y presentar decisiones adecuadas en esta nueva realidad, ya no son suficientes las habilidades de tipo determinista de los siglos pasados. La escuela no escapa a estos cambios. El proceso de formación requiere desarrollar un tipo de *pensamiento estadístico y aleatorio*, vinculado con la necesidad de interpretar sucesos que responden a multitud de causas y con resultados relativamente impredecibles. Actualmente se requiere seleccionar información pertinente y analizar múltiples caminos para tomar una decisión.

El pensamiento estadístico y aleatorio hace referencia a la capacidad de abordar la comprensión de aquellos fenómenos aleatorios, cuyas causas son complejas y múltiples para enumerarlas, y su conocimiento se torna problemático y confuso. Son fenómenos sobre los que no es posible construir modelos matemáticos exactos con los cuales se puedan determinar las condiciones iniciales. El pensamiento estadístico y aleatorio tiene que ver con esa parte del pensamiento que posibilita comprender aquellos fenómenos de tipo azaroso, en los que no tenemos certeza acerca de las causas que los generan, como si provinieran de un juego de dados. Son fenómenos cuyo estudio es necesario asumir desde la recopilación de datos numéricos empíricos en listados, tablas y gráficas (métodos estadísticos), para que se pueda hacer un acercamiento aproximado a un modelo que permita predecirlos, criticarlos y tomar decisiones con cierto grado de seguridad (probabilidad). En general, se denominan fenómenos aleatorios en matemáticas a aquellos en los que las leyes conocidas de causa-efecto no explican cómo actúa el sistema, razón por la que se recurre a funciones de probabilidad para describir su funcionamiento.

Se propone distinguir tres componentes del pensamiento estadístico y aleatorio: el estadístico, el combinatorio y el probabilístico. Hacer esta distinción no significa que se asuma que el pensamiento estadístico y aleatorio se desarrolla en los estudiantes por la agregación de lo que logran construir en cada componente. En su lugar, se trata de tres componentes íntimamente relacionados que producen un todo llamado pensamiento estadístico y aleatorio. El proceso de enseñanza debe establecer estos nexos.

2.5.5.1. Estadístico

De forma general se dirá que este componente tiene que ver con la capacidad de tomar, organizar, interpretar y presentar datos, es decir, con la comprensión de los métodos que se utilizan para recoger, procesar, describir, presentar e interpretar una colección de datos cuantitativos. Unas veces el énfasis estará puesto en la simple descripción, como cuando se desea estudiar el comportamiento de una población de estudiantes con relación a sus calificaciones. Otras veces, el énfasis está puesto más allá, y es más interesante, como cuando se desea hacer inferencias sobre poblaciones a partir del estudio de muestras. Así el método estadístico implica, de un lado, resumir nuestra experiencia buscando regularidades que sean confiables, y de otro lado, usar el resumen o el representante para poder estimar o decidir, teniendo en cuenta lo que probablemente sucederá.

Entender así la estadística como un conjunto de métodos de investigación que permite pensar de una forma eficiente y útil sobre una variedad de situaciones que implican la incertidumbre, puede ser de gran ayuda para orientar la enseñanza. Desde los primeros años en que se imparte educación sobre ella, la estadística tiene que ligarse a la problematización. No tiene mayor sentido recoger y estudiar datos sobre un hecho si no hay una pregunta por resolver. Uno es el sentido que puede construir un estudiante cuando recoge datos, hace tablas, gráficos y calcula frecuencias; por el hecho simple de responder a los requerimientos del profesor, y otro el sentido construido cuando compara grupos de datos (al menos dos), que se consideran como muestras de alguna población, para establecer semejanzas y diferencias en sus compartimientos con la intención de hacer inferencias. Calcular las medidas centrales o de dispersión para describir unos datos, cuando esa descripción no se utiliza más allá de responder al requerimiento de la tarea escolar, no ayuda mucho a darle sentido a la necesidad de estas medidas y menos a su significado.

2.5.5.2. Combinatorio

Este componente hace referencia a la capacidad de enumerar todos los modos posibles en que un número dado de objetos puede mezclarse y combinarse, de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles. Estamos frente a una capacidad cuya importancia trasciende su conexión con las matemáticas y cobra importancia en casi todas las disciplinas. Capacidad que es la ampliación y generalización del proceso de contar.

Entender de esta manera el componente combinatorio muestra que en la enseñanza debe potenciarse la capacidad de enumerar las diferentes formas de combinación, estimulando los métodos intuitivos de los estudiantes y apoyándolos para que cada vez sus estrategias sean más sistemáticas, y no se queden en la simple aplicación de fórmulas. Con las experiencias acumuladas los alumnos progresan en su capacidad de encontrar más casos posibles, hasta tener control de métodos que les permitan dar cuenta de todas las combinaciones. Afrontar problemas de combinaciones en diferentes contextos ayuda a generalizar los esquemas que se van construyendo y asigna significados más ligados a situaciones experienciales. Las prácticas de combinación son espacios privilegiados para facilitar a los educandos pensar sobre lo posible, estimulando al pensamiento a desprenderse de lo concreto, de lo singular. Los trabajos de Piaget vinculaban el pensamiento combinatorio al acceso a lo que él denominó el pensamiento formal. Más allá de que se tenga que aceptar esta tesis, y se derive, como lo hacen algunos autores, el desconocimiento de los grandes progresos en el manejo de las combinaciones soportadas en las intuiciones, parece aceptable que el despliegue de un pensamiento formal está basado en el mayor control de todas las combinaciones posibles.

Una gran ventaja de la introducción temprana de los niños a las combinaciones radica en que es posible plantear problemas de combinatoria para todos los niveles educativos, ya que no requiere del cálculo complicado y los estudiantes parecen encontrar allí retos interesantes.

2.5.5.3. Probabilístico

Este componente tiene que ver con la capacidad de establecer la diferencia entre los fenómenos aleatorios de aquellos que no lo son, con la de comparar cuál de dos eventos tiene igual, mayor o menor incertidumbre de que ocurra y con la de poder establecer de manera cuantitativa, una medida de la probabilidad y operar con estas relaciones.

Es importante entender que esta capacidad se desarrolla apoyando las intuiciones de los estudiantes sobre las estimaciones que hacen de la ocurrencia de unos eventos. Al comienzo éstas difícilmente superan tres valores: lo probable, lo poco probable y lo imposible. Pero con algo de experiencia en situaciones sencillas, logran refinarlas, estableciendo pequeñas series en las que gradúan la probabilidad de ocurrencia en términos de mayor o menor. Nuevamente, como en los dos componentes anteriores, es preciso decir aquí que el desarrollo de esta capacidad no se logra con la transmisión y el aprendizaje de fórmulas. Quizá antes de enseñar el significado Laplacino de probabilidad, convenga acercar a los alumnos a la idea de probabilidad empírica.

La probabilidad puede ser entendida como:

- Un grado de creencia racional que expresa la confianza que se le concede a una proposición con relación a otra. Por ejemplo, decir que hay "una probabilidad del 70% de que mañana llueva", significa que con relación a la proposición "muy seguramente mañana va a llover", hay un grado de mayor o menor cercanía.

- La razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. De acuerdo con esta definición, el cálculo de la probabilidad se reduce a problemas de análisis combinatorio y al tratamiento de casos ideales, en condiciones que no se cumplen en las situaciones cotidianas. Decir que tengo una probabilidad mayor de un medio de ganarme una rifa para la cual se vendieron 10 boletas, significa que tengo más de cinco boletas en el momento del sorteo.
- Frecuencia relativa en la cual se considera que la probabilidad es objetiva, sujeta a procesos de demostración práctica a través de la experimentación, porque depende de las frecuencias relativas observadas en las pruebas repetidas con anterioridad. En este caso, decir que hay una probabilidad del 90 % de que un paciente se alivie después de tomarse una medicina, significa que, en las mismas condiciones, de un total posible de 100 pacientes,se aliviaron 90 después de tomarse la misma medicina.

En el proceso de enseñanza es posible desarrollar los aspectos intuitivos de cada una de estas aproximaciones de forma complementaria, mediante situaciones de incertidumbre que puedan ser enriquecidas desde diferentes interpretaciones.

Por esta razón, asumir durante la enseñanza el pensamiento estadístico y aleatorio como la construcción integrada de los tres componentes (estadístico, combinatorio y probabilidad), requiere que la educación los integre en situaciones contextualizadas. Que entienda que desarrollar el pensamiento estadístico y aleatorio consiste en apoyar al estudiante para que construya un conjunto de capacidades de investigación con las que no se buscan soluciones y teorías únicas e irrefutables, sino más bien con las que se trata de indagar sistemáticamente la mayor cantidad de posibilidades y de trabajar desde el tratamiento de la información hacia la inferencia de modelos explicativos.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

El Pensamiento Matemático en el Primer Ciclo

Transición a grado 2º

3. El Pensamiento Matemático en el Primer Ciclo

Como se formuló anteriormente, el campo de lo matemático hace referencia al desarrollo de la capacidad de los niños de establecer relaciones y de operar con éstas. Este primer ciclo tiene una especificidad que lo distingue de los otros dos y tiene que ver con su carácter fundante. En este ciclo, los alumnos están en un momento inicial de la construcción de una buena cantidad de categorías básicas (número, medida, espacio, tiempo, etc.) sobre las que se soporta el conocimiento humano, y son estos procesos los que la escuela puede ayudar a potenciar. En cambio, cuando el alumno llega a los ciclos de educación básica A y básica B, ya ha hecho recorridos importantes. Reconocer el carácter fundante del primer ciclo, no significa desconocer que el estudiante del primer ciclo ya ha iniciado, en sus primeros años de vida, varios de estos procesos. Los trabajos de muchas investigaciones ubican en los primeros meses de vida del neonato una precocidad que no dejan de sorprender. Las experiencias del niño como sujeto social y cultural, junto con los procesos de crecimiento fisiológico, aportan en la construcción de estas categorías; muchas de ellas se empiezan a construir y logran ciertos niveles de desarrollo en presencia o ausencia de la intervención escolar (como ocurre con algunas construcciones como la lengua hablada o la capacidad de discriminación global de la forma de ciertos objetos). Una intervención pedagógica adecuada en este campo enriquecerá la construcción de muchas de estas categorías básicas, promoviendo comprensiones, potentes nociones y desarrollando algunas capacidades cognitivas, directamente involucradas con ellas.

La labor del colegio en este ciclo, con relación a este campo, tiene que ver con los procesos iniciales de construcción de las nociones básicas vinculadas a la cuantificación de conjuntos y magnitudes, las posiciones relativas entre los objetos, la forma de los objetos, con la apropiación del cambio e identificación de algunos patrones, con el manejo de pequeños grupos de datos y la diferenciación de lo necesario y posible.

Se iniciarán las precisiones sobre el desarrollo de este campo exponiendo algunas tesis que permitan aproximarse a una compresión de la naturaleza del pensamiento matemático. En un segundo momento, se precisá la organización de los subcampos para el caso específico de este ciclo. Y en un tercer momento, se tomarán los ejes, las estrategias y los subcampos para desarrollar algunos elementos que se proponen como énfasis posibles en este ciclo junto con algunas ideas para apoyar el diseño y desarrollo de experiencias en el aula.

3.1. Algunas tesis sobre el desarrollo del Pensamiento Matemático en el niño

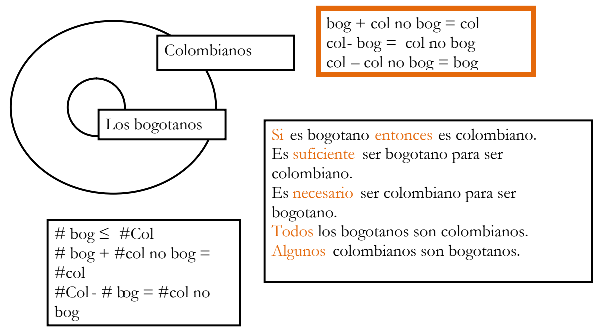
Tesis No 1. El desarrollo del Pensamiento Matemático es el desarrollo de la capacidad de establecer relaciones y de operar con éstas.

Esta tesis está planteada en el primer capítulo como la que define el objeto de trabajo en este campo. Siguiendo a Piaget y a Vergnaud (1991), el campo del pensamiento matemático se entenderá como aquel en el que se busca ayudar a los niños a construir sus capacidades de establecer relaciones y de operar con éstas. En el numeral 1.3.1 se ilustró con el ejemplo del orden lo que se quiere decir al reconocer el carácter operatorio del pensamiento, por lo cual se recomienda revisar este numeral. Aquí se amplía el carácter operatorio del pensamiento con otros ejemplos directamente ligados al primer ciclo.

Expresiones tan comunes como *"los bogotanos son colombianos"*, involucran un componente lógico-matemático además del conocimiento de geografía y política que supone este contenido. Su real comprensión y no su simple registro exige manejar una relación de inclusión (como *Bogotá es parte de Colombia,* se infiere que los bogotanos son también colombianos) y una relación aditiva de las partes y el todo (la totalidad de los colombianos puede dividirse en dos clases mutuamente complementarias: la de los bogotanos y la de los no bogotanos). La gráfica 3.1 permite entender muchas de las relaciones implicadas en una afirmación tan elemental como: "*Los bogotanos son colombianos*".

Gráfica 3.1

Relación de inclusión representada en el diagrama de Venn.



Un pensamiento adulto en general puede derivar de la afirmación "los bogotanos son colombianos", las relaciones que se han señalado, o al menos gran parte de ellas. Es posible que para la gran mayoría de las personas adultas éste no sea un proceso consciente. Casi siempre, una y otra vez, ante expresiones semejantes, los adultos pueden derivar buen número de estas relaciones y lo hacen sin mayor esfuerzo. El poder extraer estas nuevas relaciones es lo que capacita para enriquecer el significado de expresiones como "los bogotanos son colombianos", "los mamíferos son vertebrados", "los números enteros son racionales", "los rectángulos son paralelogramos", etc. Entre menor sea la capacidad de *operar* con estas relaciones, más limitado será el significado que podrá dárseles. Pero de nuevo aquí, es importante insistir que si bien los significados que se construyen de la información están vinculados con la posibilidad de hacer estas operaciones y otras más, no es el único componente que interviene. También cuentan las redes de significados que se pueden vincular a la información, al igual que la forma como los alumnos se implican en la situación.

Los estudiantes del primer ciclo no poseen un pensamiento que les permita establecer estas relaciones a partir de afirmaciones de este tipo. Ellos tienen que construirlas. Poco a poco, dependiendo de qué tan familiar y concreto les sea el contenido al que hagan referencia, irán aumentando la capacidad de manejarlas, pero esta capacidad operatoria siempre dependerá de qué tan familiar y concreto le resulten los contenidos con los cuales opera. Incluso un pensamiento adulto se mostrará menos capaz de operar con estas relaciones en contenidos que le resulten abstractos que en aquellos en los que son más concretos. Se exigirá un poco más a la capacidad de razonamiento si la expresión "los bogotanos son colombianos" se cambia por "los paralelogramos son cuadriláteros", o para resolver una pregunta como: "¿es correcto afirmar que es suficiente que una figura sea paralelogramo para que sea cuadrilátero"?

Así como este ejemplo ilustra la necesidad de establecer relaciones y operar con ellas para acceder al significado de expresiones tan comunes como "los bogotanos son colombianos", se pueden citar otros casos en el que se involucran otros tipos de relaciones.

Cuando el niño da cuenta de la posición relativa de los objetos, hay ocasiones en las que es necesario coordinar dos o más relaciones para extraer algunas consecuencias lógicas. Por ejemplo, si un objeto A está adelante de otro B y este objeto B está adelante de otro C, poder operar con estas relaciones para extraer la consecuencia lógica: "A está adelante de C".

Hacerse a la forma no se limita a las funciones de percibirla, discriminarla y nominarla. Supone entre otras capacidades la de operar con los elementos que la constituyen: longitudes de sus lados y direcciones relativas de estos. Hacerse a una comprensión conceptual de un rectángulo no es solo registrar, por ejemplo que un rectángulo tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos, es progresar en la capacidad de operar con estos elementos, hasta poder establecer relaciones lógicas entre la condición de ángulos rectos en un cuadrilátero y la igualdad de las longitudes de los lados opuestos, así como de su paralelismo.

Dar cuenta de la cantidad de algo (una longitud, una capacidad, un peso, la duración de un evento) supone operaciones lógicas, como ocurre en inferencias del tipo: si un objeto A es más largo, o tiene mayor capacidad, o es más pesado, etc., que uno B, y otro objeto C es menos largo, o tiene menor capacidad, o es menos pesado, etc., que uno B, entonces obtener como consecuencia lógica que la longitud de B está entre la longitud de A y C, o que la capacidad de B está entre la capacidad de A y C, etc.

Dar cuenta del número, además del aprendizaje de aspectos convencionales que esta noción conlleva (la sucesión numérica verbal, la lectura y la escritura de los signos numéricos), así como del aprendizaje de los resultados de las sumas y restas entre dígitos, supone también aspectos lógicos. Éstos son los involucrados en el manejo de las relaciones "mayor que...", "menor que...", e "igual a ...", y en las de complemento entre partes y todo: si $a + b = c$ entonces $c - b = a$ y $c - a = b$. Aun más, el verdadero significado de los aspectos convencionales involucrados en el número no es alcanzado por los niños en sus reales dimensiones sin la capacidad de operar con las relaciones señaladas anteriormente.

Tesis No 2. Las capacidades que en el campo de Pensamiento Matemático se ayudan a desarrollar en el niño, también se requieren, en mayor o menor grado, en experiencias en otros campos.

Las capacidades matemáticas del niño están presentes en las actividades intelectuales de los otros campos. La adquisición de la lengua escrita supone relaciones de parte y todo entre los componentes de una oración y la totalidad de ésta. Aunque la comprensión de la lengua escrita no se agota en esta relación, sí la involucra. La producción de relatos cortos, tanto orales como escritos, supone relaciones lógicas cuando se manejan relaciones espaciales y temporales puesto que se establecen jerarquías entre ideas, que hacen referencia a objetos y a hechos.

Tesis No 3. El desarrollo del Pensamiento Matemático no se da independientemente de otros campos y de las otras dimensiones de lo humano.

Así como las capacidades que se ayudan a desarrollar en este campo están presentes en experiencias propias de otros, es posible afirmar que el desarrollo de las capacidades matemáticas no se dan independientemente del desarrollo de capacidades en otros campos y de las otras dimensiones de lo humano distintas a la que se considera propiamente cognitiva.

En el campo de la Comunicación, Arte y Expresión el niño vivirá experiencias que le ayudarán a desarrollar capacidades para expresar de manera clara y precisa sus ideas, para tratar de comprender las razones de los otros, o de habilidades más específicas, como las que gana en las experiencias de plástica que seguramente enriquecerán el desarrollo de capacidades ligadas a la exploración de las formas u otras que coadyuvan al desarrollo del pensamiento espacial. Es posible admitir, y algunos autores así lo sugieren, entre ellos Boulch J (1995) que el desarrollo de capacidades para el manejo de ritmos se vincula a la capacidad para percibir las duraciones.

Las experiencias que los niños viven en el campo del pensamiento matemático comprometen, en mayor o menor grado, otras dimensiones distintas a lo propiamente cognitivo. Podría decirse que en toda acción humana están presentes todas las dimensiones propias de lo humano, aunque en ciertas actuaciones pareciera que se ponen más en juego unas que otras. Es posible que en ciertas actuaciones puntuales se diera la impresión de que los individuos logran actuar dejando de lado algunas dimensiones; pero, en general, frente a actuaciones más amplias como son los procesos de enseñanza-aprendizaje escolares, las actuaciones de los alumnos y de los profesores no se reducen a cortos episodios, ni a acciones aisladas de los individuos, podría decirse que en ellas están presente los estudiantes y los docentes como totalidad. En las experiencias que se organizan para apoyar el desarrollo del pensamiento matemático de los educandos están presentes, aunque maestros y niños no sean conscientes de ello, interacciones entre los individuos, allí hay procesos comunicativos, por lo tanto lenguaje en todas sus formas, hay afectos y sentimientos, creencias y actitudes, cuerpo en todas sus dimensiones, en particular motricidad, intereses, motivos y valoraciones, sensaciones y gustos; también poder y todos aquellos hechos presentes en la vida de los grupos. Entre mayor sea la comprensión de estos hechos mayor será la posibilidad de actuar en el aula en correspondencia con unas formas de ver y unos fines que se propongan como formación de los niños.

Más que organizar un currículo que ofrezca experiencias de enseñanza-aprendizaje en las diferentes dimensiones del desarrollo de los niños, se puede pensar que al diseñar y desarrollar las experiencias didácticas se asuma una visión más holística e integral, que permita ver que si bien en un momento dado se enseña matemática a unos individuos, sobre todo hay unos alumnos que se están educando; por tanto, todo lo que se diga y haga, como lo que no se diga y haga, cuenta en ese proceso educativo. Se trata de tomar precauciones para evitar que en el afán de ofrecer una educación al estudiante del primer ciclo que tenga presente todas sus dimensiones como ser humano, se termine por caer en propuestas pedagógicas que pretendan resolver esta intención holística, "curricularizando" el desarrollo de las dimensiones de los humano. Es decir, paradójicamente en el afán de responder a una mirada holística se termine fragmentando. De ahí la necesidad de articular lo que previamente se ha desarticulado.

Tesis No 4. Acción y lenguaje están en la base del desarrollo del Pensamiento Matemático.

El desarrollo del pensamiento matemático parte de la acción que el sujeto hace sobre los objetos, e incluso, podría decirse que es interiorización y coordinación de estas acciones. El niño actúa sobre los objetos. Los objetos y el mundo físico permiten ciertas acciones y otras no. A su vez, según el nivel de desarrollo de su pensamiento, al alumno le será posible realizar ciertas acciones y otras no. A medida que repite una misma acción o conjuntos de estas, identifica, en parte por su propio concurso y en parte con el apoyo de los otros, elementos que permanecen constantes a pesar de las variaciones que hay en los objetos y en las condiciones en que se realiza la acción. Esto que permanece de una versión a otra, de una acción o de un conjunto de acciones, le permite hacerse a un esquema. Con la experiencia, coordina estos esquemas de forma cada vez más compleja, a la vez que progresivamente los interioriza mediante las imágenes mentales que se forma de éstos y las expresiones del lenguaje propias de la cultura. Interiorizada la acción, va dejando sus componentes imaginarios y con el apoyo del lenguaje, esta progresivamente se torna más abstracta y diferenciada; se vuelve más y más simbólica. Los esquemas simbólicos son cada vez más flexibles e integrados, coordinándose de formas más variadas y complejas.

Por eso es lícito afirmar que nociones como el número surgirán, no exclusivamente del aprendizaje del conteo, y de la lectura y escritura de los signos que se utilizan para escribir los numerales, sino del significado que se construye en las múltiples y variadas experiencias que exijan al niño comparar la cantidad de dos conjuntos, componer y descomponer totalidades. A medida que progrese en estas acciones y puesto en contacto -algunas veces de manera informal y asistemática, otras de forma sistemática- con los aspectos convencionales del número (conteo, lectura y escritura) los incorporará a sus acciones y a su pensamiento.

De igual forma, la noción de medida surgirá no únicamente del aprendizaje de los nombres de las unidades y de uso mecánico de instrumentos, sino de las múltiples y variadas experiencias que exijan al niño comparar la cantidad de dos magnitudes, componer y descomponer totalidades de éstas.

Si bien se reconoce que el pensamiento surge de la acción, es necesario aclarar que desde muy temprana edad el niño incorpora a sus acciones la palabra. En un comienzo, aunque no la articula, la toma de la cultura a través de otros; por eso muchas veces, comprende expresiones en el contexto de una acción, aunque no puede decirlas de forma exacta (el niño pequeño podrá identificar dentro de ciertos límites la ficha más grande que hay en un montón y sin embargo al expresar que ha tomado "una grande"). El lenguaje del sujeto se diferencia y se complejiza a medida que el pensamiento matemático se diferencia y complejiza y viceversa.

Aunque el niño de preescolar en un momento de su desarrollo difícilmente usará por cuenta propia expresiones como "*esto ___ es más alto que esto ___*", podrá entenderlas al escucharlas de un adulto; como cuando sigue órdenes de *tipo "tráigame un lápiz que sea más largo que este*". Sin embargo, hechos como estos no pueden llevar al profesor a la idea de que el alumno está en posesión de una verdadera relación. Simplemente, en muchos casos tiene éxito en tareas como estas porque traduce la consigna en los términos que le es posible comprenderla: *"tráigame un lápiz grande"*.

Inicialmente vocablos como *grande* son vocablos indiferenciados que tienen significados variados: 'es alto', 'es mayor de edad', 'es gordo', 'es grueso', etc. Esta indiferenciación inicial, poco a poco se transforma en un vocablo más preciso a medida que el niño diferencia magnitudes de un objeto. Inicialmente expresiones como "más grande", "más alto", etc., no son propiamente relaciones; son más bien vocablos usados para expresar cualidades percibidas de los objetos. Poco a poco, al enfrentarse a muchas situaciones que hacen caer en la cuenta al niño que un objeto que califica como "grande", o como "más grande", puede ser "pequeño" o "más pequeño" puesto en otra colección. Los vocablos como cualificadores poco a poco dan lugar a verdaderas relaciones: "es grande" se transforma en, "… es más grande que..."

Tesis No 5. El desarrollo del Pensamiento Matemático se relaciona con el desarrollo psicomotriz

El niño empieza a dar cuenta de la posición relativa de los objetos utilizando su propio cuerpo como referencia. Gracias al desarrollo de su esquema corporal enriquece las posibilidades de operar con estas relaciones. El desarrollo del esquema corporal no se limita al conocimiento de su topografía, sino a la coordinación en movimiento de sus componentes (Lucat, 1979).

En un comienzo, las posiciones de los objetos son definidas por el niño con referencia a su propio cuerpo y poco a poco se hace capaz de trasladar su esquema a otros cuerpos. Inicialmente este traslado se hace a aquellos que guardan semejanzas más o menos estrechas con la topografía del suyo y cada vez más a otros objetos que ya no tienen tal semejanza. Estos progresos lo capacitan para dar cuenta de las posiciones relativas entre otros cuerpos. Pero nuevamente aquí, estos avances, para descentrar los sistemas de referencia, están acompañados y ligados a la capacidad de operar con las relaciones que establece; la capacidad de coordinar diferentes sistemas de referencia para englobarlos en sistemas más amplios, está ligada a la capacidad de operar con las relaciones. En la capacidad de ubicarse espacialmente es necesario considerar la representación mental compuesta, no solo de elementos imaginarios o simbólicos (como cuando puede imaginarse o leerse un mapa), sino además, tener la capacidad de coordinar, en forma efectiva e imaginada, giros del propio cuerpo sin perder los puntos de referencias, lo que se reconoce como el sentido de la orientación.

3.2. Ejes curriculares

Tal como se definió en el segundo capítulo (ver numeral 2.3) son tres los ejes que atraviesan la estructura curricular del campo del pensamiento matemático: razonamiento, modelación y comunicación y representación. En este apartado se plantean las especificidades que adquieren estos tres ejes en el primer ciclo. Se recomienda al lector(a) revisar las formulaciones que en el primer capítulo se hicieron sobre cada uno de ellos, ya que esto le posibilitará una mejor comprensión de los que aquí se presentan.

3.2.1. Eje de razonamiento

En el primer capítulo se señalaron como hechos asociables al razonamiento la capacidad de:

- Preguntar, conjeturar, formular hipótesis, diseñar estrategias de comprobación, analizar los datos obtenidos, extraer y formular conclusiones.
- Argumentar, entendida como el proceso de ofrecer razones con la intención de convencer a otros, apoyándose en la exposición de la validez de sus ideas.[42] En particular, se considera que la prueba, entendida como muestra de la validez de una proposición basada en el método deductivo, es un tipo de argumentación.
- El control del mismo proceso del argumento construido.
- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procedimientos propios y de otros.
- Observar conjuntos de hechos que varían, identificar las regularidades y extraer patrones.

¿Cuáles de estos hechos están presentes en un niño del primer ciclo y cuáles no?, ¿en qué nivel de elaboración están presentes?, ¿es lícito considerar que el niño de este ciclo es capaz de razonar, aunque lo haga en un nivel elemental o, por el contrario, es necesario admitir que carece de capacidad de razonamiento?

Al revisar cada uno de estos hechos asociables al razonamiento, el lector(a) tendrá la sensación que en algunos casos podrá arriesgar respuestas en un sentido o en otro. En algunos casos, la respuesta puede ser claramente sí o claramente no, pero con relación a otros hechos, francamente considerará confuso hacerlo, encontrará tantos argumentos a favor como en contra.

En el campo de la investigación no se encuentran consensos. Muchas veces el disenso está cruzado por las diferencias que inicialmente se asumen sobre lo que se entiende por razonar y de los hechos que se le asocian. Sin embargo, a pesar de las diferencias, una idea que ha ganado consenso a partir de la investigación en las últimas décadas, es admitir que la capacidad de razonar del niño está condicionada por el contexto en el cual razona y por su implicación en el problema. En cuanto mayor y mejor conocimiento de la situación tenga de los elementos que componen la tarea, y en cuanto mayor sea el interés y deseo de resolverla, los razonamientos hechos serán más complejos y más controlados. Unas veces se verá a un niño capaz de coordinar dimensiones distintas de la tarea, de planear, de controlar sus tentativas, de contrastar; mientras que otras veces, ese mismo alumno frente a situaciones que le son menos conocidas o en las que está menos implicado, se le verá más limitado.

Más allá de las discusiones teóricas, en este trabajo es adecuado (apoyándose en Puche) plantear que el niño es portador de una "racionalidad mejorante (…), que él desarrolla de manera natural (…)". Esta visión se deriva de la idea según la cual, "la construcción de herramientas lógicas del pensamiento es una de las condiciones que va a permitir y garantizar pensar mejor la realidad" (Puche 2001). Al actuar sobre su entorno, el *niño* da muestras de pensar de manera natural, con herramientas cognitivas que mejora permanentemente en la constante actividad de resolver los problemas, al que se ve enfrentado al intentar alcanzar los fines que se propone. La autora sostiene

42 Algunos autores como Balacheff, N (2000) o León y Calderón (2003) incluyen la prueba (la demostración) o la validación en la argumentación, mientras que otros como Duval (2004) la excluyen.

que "según Piaget esa racionalidad mejorante es espontáneamente construida por el niño". Aunque el término "espontáneo" conlleva aceptar al alumno como sujeto con capacidad de pensar y mejorar ese pensar, independientemente de la intervención sistemática de la escuela, no excluye que la intervención escolar pueda potenciarla, pero esto es posible a condición de ofrecer prácticas de enseñanza en las que los estudiantes sean impelidos a pensar.

Pero, ¿cuáles son esas herramientas cognitivas que constituyen esa "racionalidad mejorante" que el niño va construyendo? Puche destaca algunas, que para este caso tienen importancia especial: inferencia, clasificación, planificación, experimentación y formulación de hipótesis.

De estas herramientas, la que más directamente se liga a lo que se ha acordado asociar al proceso de razonamiento es la capacidad de hacer inferencias, sin embargo en este nivel conviene resaltar como procesos de razonamiento, en forma incipiente, acciones como planear y realizar un experimento, extraer información de este y contrastar lo que se piensa con la información que el experimento arroja como forma de darle validez a una idea que se ha anticipado.

3.2.1.1. Énfasis recomendados e ideas para el aula

En este apartado se ofrecen algunas ideas que orientan al maestro sobre los énfasis que se recomiendan hacer en el primer ciclo y en el trabajo de aula, con el fin de promover el desarrollo del razonamiento en el niño.

El desarrollo del razonamiento de los educandos no es un aspecto a trabajar en momentos diferentes a los que se enseña matemática o cualquier otro conocimiento, a la manera de "actividades para pensar"; no, en los diferentes sistemas conceptuales que se busque ayudar a construir y en los diferentes contextos en los que se trabaje, el docente ha de promover el razonamiento de los estudiantes. Es más, podría decirse que gracias a que los niños razonan logran comprender genuinamente lo que se les enseña, si esto no se da simplemente aprenderán de memoria.

A su manera y según sus posibilidades, el niño del primer ciclo está en capacidad de preguntar, de atreverse a anticipar qué puede suceder a partir de lo que ya conoce y hacer explicaciones de un hecho y dar razones. También puede aceptarse que analiza datos, extrae y formula conclusiones. Sin embargo todas estas acciones se caracterizan por estar excesivamente centradas en un aspecto del hecho, dejando de lado otros. Esto sucede precisamente por la incapacidad del niño de coordinarlos para ofrecer una explicación que tenga más en cuenta el conjunto.

Las evaluaciones que un alumno hace de un hecho tienden a soportarse, de forma exclusiva, sobre los datos percibidos, por lo que dependen mucho de las configuraciones de los objetos, así como ocurre en las experiencias típicas de Piaget sobre conservación.

El educando de este ciclo está en capacidad de argumentar, aunque las razones que exponen sean incompletas y las hilaciones sean débiles. En este ciclo le cuesta tener en cuenta las afirmaciones del otro y tiene poco control de sus propios argumentos.

Los niños logran identificar patrones y regularidades sencillas, por lo que hacen generalizaciones aunque no tengan capacidad para controlar la validez de estas.

El desarrollo del razonamiento de los estudiantes de este primer ciclo se favorece:

- Creando situaciones concretas en las que se fijen fines, donde tengan que planear para conseguirlos (realizar acciones y disponer medios) y en las que tengan la posibilidad de problematizarse.
- Invitándolos a inventar sus propias alternativas de solución y a compartirlas con los otros solicitándoles razones de sus afirmaciones (¿por qué piensa que la solución dada es adecuada?). La valoración positiva de las propuestas incipientes de los niños se constituye en un factor determinante para la construcción de un autoconcepto como sujeto capaz de pensar.
- Solicitándoles que hagan pequeñas anticipaciones de lo que puede suceder con un hecho, apoyándose en las experiencias adquiridas. Invitándolos a que contrasten el resultado obtenido en una experiencia con lo que se había anticipado.
- Estimulándolos para que tengan en cuenta lo que dicen los otros, contrasten con sus propias ideas, e identifiquen las semejanzas y diferencias entre sus argumentos.
- Pidiéndoles que evalúen la permanencia de la solución cuando se introducen pequeñas variaciones a un problema resuelto y que hagan los ajustes necesarios para adecuar la respuesta. Por ejemplo, en transición, un juego en el que el niño tiene que pagar con dos fichas de puntos una cantidad dada, digamos 8 y habiéndose ofrecido la solución de 3 y 5, preguntar, ¿hay otras fichas con las que se pueda pagar?, o preguntar *¿qué otra solución es posible?*, *¿quién puede encontrar más formas?*
- Enfrentándolos a situaciones en las que tengan que coordinar dos dimensiones de un problema para compensar las variaciones, con el fin de mantener constante la totalidad. Por ejemplo, en primero o segundo, una situación en la que se construyen trenes con regletas. Si se ha hecho un tren de 6 regletas de cierta longitud, preguntar, *¿es posible construir otro tren igual de largo, pero empleando más regletas?,* o si se quieren utilizar menos regletas, indagar *¿qué habría que hacer?* Solicitar que se anticipe una respuesta sin ejecutar las acciones siempre es una oportunidad para movilizar el pensamiento. Dada la respuesta, contrastarla con el resultado de la acción. Pero lo más importante no es quedarse en el nivel de la verificación para decir algo sobre la validez de las respuestas, sino promover la reflexión sobre la correspondencia o no de lo anticipado y lo realizado.

3.2.2. Eje de modelación

En el capítulo anterior, siguiendo a Vasco se dijo que "*la mente humana busca relaciones de modelación para comprender*". Cuando se tienen dos sistemas diferentes, pero parecen tener estructuras muy similares, se usa uno de los sistemas para representar el otro, de esa manera se estudia el funcionamiento del sistema modelado con base en el sistema modelo. El sistema modelo sirve de apoyo al pensamiento para imaginar el sistema real. Este recurso es muy frecuente en las ciencias en general y en particular en la matemática; es más, podría decirse que la ciencia no es otra cosa que modelación. Al prescindir de los contenidos particulares, la matemática construye modelos que permiten representar los elementos de un sistema y la forma como se relacionan (ver numeral 2.3.2).

Ya se dijo que una expresión como 13 + 24 puede llegar a ser para un niño la representación simbólica de un modelo de composición de partes. Como parte del apoyo al alumno para que progrese en su pensamiento aditivo, se puede impulsar a que imagine muchas situaciones que puedan resolverse como 13 + 24, se trata de entender que una condición esencial de la modelación consiste en dar cuenta de la representación de lo común en la variedad.

3.2.2.1. Énfasis recomendados e ideas para el aula

Las exploraciones de los niños, de su espacio físico, son un lugar privilegiado para construir y utilizar modelos. Cuando los estudiantes del primer ciclo tienen la posibilidad de construir prototipos de objetos o de sitios, como la maqueta del salón, o hacer dibujos de algunos espacios que les son conocidos se están iniciando en esa capacidad. El profesor puede apoyarlos para que usen estas construcciones como verdaderos modelos, haciendo preguntas que los lleve a establecer correspondencias entre el modelo y lo modelado, tales como ubicar un objeto o sitio en el modelo a partir de la información que se tiene de él en la situación real y viceversa. De igual forma, cuando los niños desbaratan el prototipo de un objeto que previamente han elaborado en cartulina y exploran sus partes, están utilizando este modelo para estudiar esas partes y las relaciones entre ellas.

El profesor puede invitar a los niños a hacer representaciones gráficas de secuencias de movimientos que se practican para una danza y utilizarlos para identificar semejanzas y diferencias entre ellas.

Puede enseñarles a marcar sobre una recta trazos a distancias adecuadas para representar secuencias de sonidos. Estos modelos espaciales pueden ser usados en sentido contrario, pedir que se produzcan secuencias de sonidos a partir de la información gráfica, manteniendo los tiempos entre sonidos por las distancias entre los trazos.

También se puede ayudar a los alumnos a que se hagan a modelos más abstractos, utilizando representaciones icónicas equiparables a sencillas representaciones simbólicas, para que identifiquen estructuras comunes en diferentes tipos de problemas. A los niños que ya han hecho algunos construcciones de la composición y descomposición aditiva, se les pide que den un listado de problemas de diferente estructura matemática y con variaciones en su formulación lingüística identifiquen todos los que para ser resueltos requieran una operación como ☼ + ◙, y todos en los que tengan que hacer ☺ - ■, habiéndoles explicado previamente que debajo de las figuras se esconden números. Se les puede solicitar que inventen problemas que correspondan a diferentes representaciones. Este tipo de problemas ayudan a los alumnos a tomar conciencia de la estructura común de los problemas expresada por una representación.

Ligados a situaciones de variación también se tienen posibilidades de aproximar a los estudiantes del primer ciclo a la modelación: cuando ellos tienen que identificar regularidad en secuencias de colores, de figuras, de números, se los puede llevar más allá de encontrar unos cuantos elementos nuevos, se les puede pedir que expresen el patrón de la secuencia y que hagan representaciones icónicas de él, en la misma dirección se le puede pedir que inventen otras secuencias que tengan el mismo patrón.

En general a los educandos de este ciclo se les puede apoyar para que se inicien en la construcción de modelos ofreciéndoles experiencias en las que tengan que identificar la estructura de diferentes variaciones regidas por el mismo patrón.

3.2.3. Eje de comunicación y representación

El eje de comunicación y representación pretende asignarle un lugar privilegiado al papel del lenguaje verbal y no verbal en la construcción del conocimiento matemático escolar, y en las maneras como los maestros crean contextos y situaciones comunicativas en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta y en la comprensión de la matemática.

Los hechos que se pueden asociar con la comunicación y la representación en las matemáticas escolares son amplios y diversos, entre ellos se tienen:

- Los procesos de comprensión (lectura y escucha) del lenguaje verbal y no verbal del sujeto en la construcción del saber matemático escolar.
- Los procesos de producción (escritura y habla) de los sujetos que participan en la actividad matemática.
- Las maneras como el sujeto se representa mentalmente las situaciones y problemas matemáticos relacionados con los diferentes sistemas conceptuales y las representaciones semióticas utilizadas para comunicarlos
- La interacción. el intercambio y la negociación de significados y sentidos en el aula, en particular el ambiente y los diversos contextos y relaciones que se generan para estimular y posibilitar esta negociación.
- Las formas de expresión de las emociones y sentimientos que el sujeto activa en la construcción de ese conocimiento escolar.

¿Cuáles de estos hechos están presentes en un niño del primer ciclo y cuáles no? ¿En qué nivel de elaboración?

El niño de primer ciclo ya ha pasado por la adquisición de la lengua materna, domina los códigos del lenguaje oral y utiliza esta herramienta para comprender el mundo, comunicarse y establecer relaciones con los otros. Esta adquisición de la lengua favorece su estructuración cognitiva y la disposición para hacerse a la construcción de algunas categorías o nociones básicas del saber matemático.

La experiencia cultural en la que la acción y el lenguaje han estado presentes le permiten al niño tener contacto y enfrentar situaciones del quehacer matemático, asignarle nombre a objetos matemáticos, hacer enunciaciones matemáticas, e incluso leer y escribir algunos signos convencionales con los cuales la cultura ha nominado y diferenciado significados que encierran conceptos matemáticos. ¿Quién no ha pasado por la experiencia del conteo y la sucesión numérica al subir escaleras en compañía de un adulto o al contarle o mostrar con sus dedos a otros cuántos años tiene? ¿Quién no ha vivido la experiencia y el placer de descubrir que las monedas o billetes tienen un valor y un número con el que puede o no comprar el dulce o la chocolatina tan deseada? Son múltiples las situaciones en las que los niños hacen uso de los números y se dan cuenta que éstos transmiten diferente información de acuerdo con el contexto en que se encuentran. En esta edad ya el niño se plantea preguntas en relación con las formas de nominar el tiempo y lo vincula con su experiencia, por ejemplo cuando pregunta: cuándo es ayer, hoy y mañana. Así mismo en sus actividades cotidianas desde antes de ingresar al preescolar, los niños ya han tenido diversas experiencias lingüísticas con distintas magnitudes, principalmente la longitud, el peso, la capacidad.

Entonces, es posible, afirmar con seguridad que el niño al ingresar a este ciclo ya ha construido representaciones y comprensiones sobre la matemática y aunque están en un nivel elemental de elaboración, le han servido para explicarse y actuar en el mundo. Estos conocimientos llamados por algunos *intuitivos* o *informales* son el punto de partida que el docente del primer ciclo ha de reconocer para diseñar situaciones didácticas que favorezcan mayores niveles de elaboración.

3.2.3.1. Énfasis recomendados e ideas para el aula

Se proponen aquí algunos aspectos en los que conviene enfatizar durante este ciclo teniendo en cuenta algunas características del desarrollo del lenguaje y las construcciones matemáticas de los niños. Estos son un referente para que cada docente en su contexto de clase las profundice, amplíe, complemente y precise.

Puede decirse que los alumnos de este ciclo inician la construcción del sistema de la lengua escrita y de los sistemas de escritura matemáticos. En su experiencia cultural ya han construido significaciones frente a ciertas nociones de las matemáticas ligadas a lo numérico, a la medida, a lo espacio-temporal. Algunos ya leen y escriben el signo numérico aunque no se hayan hecho a la comprensión profunda que encierra el concepto de número. Usan palabras como arriba y abajo, aunque describen propiedades más que relaciones. Reconocen y discriminan algunos cuantificadores así como algunos símbolos matemáticos básicos que se logran diferenciar de otros signos de la lengua materna (unos son los signos de los números y los otros los de las letras). Inician la aproximación a la sintaxis del sistema decimal de numeración. Sin embargo el hecho de leer los códigos y dominar algunas reglas gramaticales del lenguaje escrito no garantiza que los niños se representen en su pensamiento las estructuras lógicas que soportan ciertas actividades matemáticas; es decir, no garantiza el acceso al significado semántico que les permita establecer las relaciones y operar adecuadamente.

Se puede aceptar como característico de los alumnos de este ciclo el hecho de que comprendan problemas que surgen de contextos significativos eminentemente pragmáticos o que les implican cuantificar de manera sencilla, *como cuando juegan a los bolos, de manera natural surgen preguntas como quién tumbó más, quién tumbó menos, cuántos tumbó*. Pueden resolver problemas sencillos cuando se les formulan al interior de ese contexto y de manera oral. Sin embargo debido al escaso dominio de la decodificación del lenguaje escrito, tienen dificultad para comprender problemas de enunciado que se les presentan por escrito o para representar simbólicamente la expresión matemática que los conduce a su solución. También se les dificulta explicar verbalmente los procedimientos utilizados para su resolución.

La comprensión de textos es literal, puesto que asignan significados de 'diccionario', en términos de Eco. Es decir, reconocen, discriminan y asocian automáticamente con su uso ligado a la acción. En ese sentido los problemas de enunciación verbal que inicialmente favorecen la comprensión y la representación mental son aquellos en los que se presentan acciones o eventos de manera secuencial cercanas a como ocurre la acción.

Cuando los niños resuelven problemas se valen de procedimientos que nos revelan sus niveles de comprensión, en las escrituras "espontáneas" que hacen cuando realizan cuentas los maestros pueden encontrar claves para conocer el pensamiento de sus estudiantes. En un comienzo cuando los niños empiezan a consolidar un esquema, aunque logren hacer cuentas tienen gran dificultad para expresar cómo lo hacen; y es precisamente ahí donde hay que buscar que poco a poco vayan expresando lo que hacen, ayudarles a organizar su pensamiento.

En relación con las producciones escriturales, cada vez que los estudiantes se enfrentan a problemas en los que se demanda la comprensión de sistemas conceptuales, para su resolución se valen de procedimientos que revelan sus niveles de representación, en los que utilizan sus propias escrituras, o escrituras espontáneas. Estas escrituras van desde las que sustituyen al objeto, hasta las semióticas -dibujos, imágenes, iconos- escrituras cercanas al lenguaje natural hasta acceder a la simbología propia del lenguaje matemático.

En esta edad en las conversaciones de los niños priman los monólogos. Por su pensamiento y su desarrollo social con tendencia egocéntrica, el estudiante no está en la disposición cognitiva, social y comunicativa que le permita establecer relaciones y comunicaciones en las que se hacen presentes la discusión, el debate, la toma de posición, asumir decisiones conjuntas producto del diálogo y el establecimiento de acuerdos consensuados.

La capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas se promueve en los estudiantes cuando exploran, manipulan, comparan, observan y, sobre todo, expresan sus ideas y son tomadas en cuenta para saber cómo interpretan, perciben el mundo, cómo se ven a sí mismos como parte de él y la manera como se posicionan frente al lenguaje.

Además, esta capacidad de comunicación y representación de ideas matemáticas se desarrolla al enfrentarlos a múltiples y variadas experiencias que les permita ir complejizando su comprensión y consolidar ese pensamiento particular. Valerse del lenguaje oral para narrar, describir, explicar poco a poco los acerca a las formas escriturales propias del simbolismo matemático. Se pretende así que las situaciones propuestas a los niños favorezcan su habilidad para expresar ideas, explicar a sus compañeros, argumentar sus formas de solución y reconocer sus errores, comparar sus procedimientos con la de los otros y ofrecer argumentos a favor o en contra de una solución. El hecho de que los alumnos expresen sus ideas permite a los docentes entender qué razonamiento siguen para la resolución de un problema, identificar los errores y aciertos e introducir las preguntas que les ayudan a avanzar. Se requiere la sensibilidad y conocimiento del maestro para observar e interpretar los procedimientos que utilizan sus estudiantes para resolver los problemas planteados.

Un énfasis importante en este ciclo consiste en formular problemas vinculados a experiencias concretas del niño que movilicen sus intereses y deseos, experiencias cercanas a sus vivencias. El maestro puede presentar los problemas desde enunciaciones a manera de relato o narración, o valerse de la dramatización cuando se dificulta su comprensión. Como se dijo anteriormente los problemas de enunciación verbal que inicialmente favorecen la representación mental y la comprensión en los niños de este ciclo, son aquellos que se enuncian de manera directa; en la medida en que ganan comprensión se pueden introducir problemas con enunciaciones desligadas de la acción en las que se cambia el orden o la estructura sintáctica de las construcciones lingüísticas. Por ejemplo *¿Si salí de mi casa con 5 monas y me regalaron 3, con cuántas me quedo?* Este problema formulado con una estructura desligada de la acción, aunque se mantiene su estructura semántica, le hace demandas cognitivas más complejas al alumno: *¿Con cuántas monas me quedo si me encontré 3 y al salir de la casa tenía 5?*

Crear situaciones o intervenir para que los niños tomen conciencia de lo que hacen y lo comuniquen. Apoyarlos para que produzcan sus propias escrituras que revelen sus niveles de representación interna y los procedimientos utilizados. Estas escrituras van desde las que sustituyen al objeto por otro objeto -por ejemplo, bolos por piedras en el conteo- hasta las escrituras soportadas en diferentes registros semióticos –dedos, dibujos, imágenes, iconos-. Desde escrituras cercanas al lenguaje natural hasta las que descansan en la simbología propia del lenguaje matemático. Reconocer, valorar y contrastar las diversas escrituras que aparecen, incluida la convencional de las matemáticas que él representa y buscar que éstas cada vez sean más claras y coherentes; que poco a poco, se sustituyan por escrituras más "formalizadas". Preguntarse por el momento adecuado para presentar las escrituras propias de las matemáticas (palabras, signos, sistemas simbólicos).

Asumir en la clase de matemáticas la diversidad textual que enriquezca la apropiación del saber matemático, como relatos y narraciones, textos instruccionales, informativos, argumentativos, explicativos, descriptivos, dialógicos, hasta textos formalizados de la matemática. Como cuando se le pida que narre acontecimientos, o que organice una secuencia de eventos a través de diversos lenguajes y registros semióticos: fotografías, cómics, texto escrito, o cuando se le estimula para que describa objetos identificando los rasgos esenciales, o que lea y represente datos y fenómenos a través de diferentes registros gráficos como tablas y barras.

En relación con las interacciones entre alumnos y maestro, y entre los mismos alumnos, el profesor puede favorecer conversaciones en las que primen la narración, la descripción, la explicación y dar razones. Promover diálogos y discusiones alrededor de la revisión colectiva de procedimientos y resultados junto con la contrastación de diversas producciones, introducir preguntas que lleven a que los estudiantes den razones, digan sus "porqués" e intenten convencer a otros son actividades que generan desequilibrios cognitivos, que les implica descentrarse, entender la perspectiva del otro, coordinar puntos de vista, tomar decisiones conjuntas y establecer relaciones de cooperación basadas en la reciprocidad. Generar estas situaciones posibilita superar la conversación monóloga o acumulativa.

Hacerse a la pragmática del lenguaje. Tanto docentes como alumnos procurarán reflexionar sobre el discurso en el aula, explicitando sus intenciones comunicativas y las reglas propias del lenguaje del aula, como: cuándo preguntar; la importancia de escuchar y respetar turnos a la hora de participar; el manejo de las instrucciones y la relación con la acción; la importancia de regular y expresar las emociones que generan las tareas matemáticas; la diferenciación del lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas (con sus propias palabras, vocabulario, símbolos y signos); el sentido de la escritura para registrar, llevar cuentas y comunicar y la toma de conciencia de cómo el cuerpo comunica.

Hacer del aula y de la clase de matemáticas una práctica con sentido involucra diversas situaciones comunicativas, múltiples sistemas de representación y diversos formatos textuales y registros semióticos. Esto contribuye a que los aprendices construyan su "conciencia lingüística", lo que significa que de manera implícita y/o explícita -ya sea mediante el uso o la reflexión sobre el lenguaje y los procesos comunicativos que allí ocurren- se den cuenta que el lenguaje comunica, que es una herramienta para pensar el mundo, a si mismos, a las diferentes disciplinas, en este caso la matemática y para relacionarse con otros.

3.2.4. Subcampos del Pensamiento Matemático

En el primer capítulo se señaló que bajo el campo del Pensamiento Matemático se incluye el desarrollo de las capacidades de los sujetos para establecer relaciones y operar con ellas. Las relaciones y operaciones varían tanto por su estructura como por el contenido al cual se aplican; de ahí la necesidad y posibilidad de distinguir, en ese gran proceso de construcción del pensamiento matemático, subprocesos ligados a sistemas de conceptos específicos sobre los cuales se aplican determinadas relaciones y se ejecutan determinadas operaciones.

Como se advirtió en el capítulo anterior, la propuesta de considerar el campo del Pensamiento Matemático como constituido por los cinco subcampos que generalmente aparecen en la literatura de la educación matemática y que son el pensamiento numérico, el pensamiento métrico, el pensamiento espacial-geométrico, el pensamiento estocástico y el pensamiento variacional-algebraico se modifica un poco para el caso del primer ciclo con esto se busca adaptar esta subdivisión al momento del desarrollo del pensamiento de los niños.

Debido al momento inicial de las construcciones de las nociones lógico-matemáticas en las que están los alumnos, se establecen relaciones especiales entre ellas, diferentes a las que se pueden establecer en momentos más avanzados como sucede en los ciclos de educación básica A y B. Para el primer ciclo, de forma muy especial, el número y la medida están íntimamente ligados por un hecho común y es el de la cuantificación, razón por la cual en esta etapa se propone incluirlos en un único subcampo, que se ha llamado la cuantificación.

Otro cambio que se propone en este ciclo consiste en abrir uno relativo a la temporalidad. Aunque a primera vista esta noción debería incluirse en el subcampo del pensamiento métrico, aquí conviene darle un tratamiento especial, dejándolo en el mismo nivel del pensamiento espacial. Se propone considerar que la noción de *tiempo* no surge exclusivamente de la medida de la duración de los eventos, sino también de la ordenación de evento. Sobre esto se ampliará más adelante.

Así las cosas, se tienen los siguientes subcampos para el primer ciclo:

3.2.4.1. Cuantificación

Este subcampo hace referencia a esa parte del Pensamiento Matemático ligado a la cuantificación. Se cuantifican cantidades discretas y cantidades continuas. Sobre las experiencias de las primeras se fundamenta la noción de número y sobre las segundas las nociones de medición de magnitudes.[43]

3.2.4.2. Espacial-geométrico

Este subcampo incluye esa parte del pensamiento vinculada a las experiencias con los objetos físicos[44] y sus representaciones gráficas cuando se hace referencia a

43 El profesor Carlo Federico solía decir que existían los números de la aritmética y de la física; a la primera correspondían los cardinales y a la segunda los que se utilizan para dar cuenta de las cantidades de una magnitud.

44 Para este caso el propio cuerpo y el de los otros son considerados como otros objetos físicos.

su localización, a sus cambios de posición (traslados de un sitio a otro o a movimientos del objeto sin trasladarlos), a sus formas y a las modificaciones de estas.

3.2.4.3. Temporal

Este subcampo tiene que ver con esa parte del Pensamiento Matemático vinculada con las experiencias relativas a los eventos (los hechos), haciendo referencia al momento de ocurrencia y a su duración.

3.2.4.4. Estadístico y aleatorio

Este subcampo tiene que ver con esa parte del Pensamiento Matemático vinculada con el manejo de datos (recolección, organización, presentación y análisis) y con la valoración del grado de posibilidad de la ocurrencia de un hecho (es seguro que ocurra, es imposible que ocurra, es probable que ocurra).

3.2.4.5. Algebraico-variacional

Este subcampo tiene que ver con esa parte del Pensamiento Matemático relacionada con el estudio de las formas como varían dos magnitudes. Para este ciclo, se vincula con la identificación de patrones de cambio de momentos discretos de estas variaciones.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Pensamiento Matemático en el ciclo de educación básica A

grados 3º a 6º

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

4. Pensamiento Matemático en el ciclo de educación básica

En este capítulo se desarrollan algunas especificidades del campo en el ciclo de educación básica A. Para una mayor contextualización y comprensión de lo que aquí se plantea se recomienda estudiar los planteamientos que se formulan en los dos primeros capítulos. En primera instancia se toman uno a uno los ejes curriculares y en segundo término cada uno de los subcampos propuestos para este ciclo. En cada caso se hacen recomendaciones sobre aspectos que se consideran importantes de enfatizar en este ciclo y se ofrecen algunas ideas para el trabajo en el aula. Con esto no se pretende agotar todo lo que es posible y deseable realizar en el ciclo, pero sí ofrecer algunas orientaciones de lo que es necesario hacer. Sin embargo se advierte que los planteamientos hechos aquí no deben asumirse como prescripciones curriculares, más bien se invita a los maestros y maestras a que los lean como concreciones a los planteamientos generales y se estudien en las reuniones de áreas y en los grupos locales, para construir acuerdos básicos sobre hacia dónde orientar la educación matemática en el ciclo de educación básica A.

4.1. Ejes curriculares

Tal como se definió en el capítulo primero son tres los ejes que atraviesan la estructura curricular del campo del pensamiento matemático: razonamiento, modelación y comunicación y representación. A continuación se plantean las especificidades que adquieren estos tres ejes en el ciclo de educación básica A. Para mayor comprensión de lo que se plantea en este capítulo se recomienda revisar el numeral del capítulo segundo correspondiente al eje que se esté estudiando.

4.1.1. Razonamiento

Aunque, no se puede hablar con precisión de formas de razonamiento en un momento del desarrollo intelectual de un alumno, independientemente del contenido y la situación contextual, es posible recomendar algunos aspectos en los que conviene enfatizar durante este ciclo, teniendo en cuenta algunas características del razonamiento del estudiante del ciclo de educación básica A. Estas ideas son apenas iniciales, la investigación[45] y la innovación tienen mucho que decir, por eso un trabajo posterior deberá precisar la caracterización del razonamiento del

45 En el país se rescatan los trabajos de Olga Lucía León y Dora Calderón cuyo tema central ha sido la argumentación en Matemáticas. De sus documentos se rescata: "La Argumentación en Matemáticas en el Aula: Una Oportunidad para la Diversidad". (1996). Bogotá: Universidad Externado de Colombia y "Argumentar y validar en Matemáticas ¿una relación necesaria?" (2003). Bogotá: Colciencias y Universidad del Valle. Otros trabajos son: Correa, J., Dimaté, C., y Martínez, N. (1999). "Saber y saberlo demostrar: hacia una didáctica de la argumentacion". Bogotá: Universidad Externado de Colombia y Samper, C., Camargo, L. y Leguizamón de Bernal, C. (2003). "Cómo promover el Razonamiento en el aula por medio de la geometría". Bogotá: UPN-CIUP.

niño de este ciclo de educación y concretar experiencias de enseñanza adecuadas.

- Al niño de este ciclo le resulta difícil dar razones sobre la validez de sus ideas. Cuando se logra ponerlo en situación de hacerlo, se observan varias formas de reaccionar: se soporta en la evidencia empírica "yo lo hice así y me salió", "porque yo lo hice así"; en razones de autoridad "es así porque así me lo sé", o "porque así me lo enseñaron"; o simplemente en lugar de ofrecer una justificación se limita a describir el procedimiento seguido ya que ante requerimientos del profesor del tipo "explique por qué", o ante la necesidad de dar una justificación responde describiendo lo que hizo, como si entendiera que dar una razón de la validez de lo que dice y realiza es mostrar que lo que dice y hace es correcto. Se trata entonces de promover situaciones en la que el alumno empiece a elaborar razones sencillas que sustenten la validez de sus ideas.
- Los estudiantes de este ciclo tienen grandes dificultades para distinguir entre no poder encontrar un hecho o un camino y la imposibilidad lógica de conseguirlo ("Eso no se cumple porque intenté hacerlo y no pude"). Se trata de enfrentar al estudiante de este ciclo ante apelaciones del tipo: "¿Es imposible hacerlo o usted no encontró cómo hacerlo?"
- Los educandos del ciclo de educación básica A tienen dificultades para ofrecer contra argumentos que rebatan la idea de los otros. Es común que cuando tienen cierta certeza de que la idea del otro es incorrecta, se limiten a oponérsele mostrando la propia en la que confían. Se trata de hacerles notar la limitación de "contra argumentos" del tipo "lo suyo es falso porque lo mío es verdadero".
- Los alumnos de este nivel generalmente tienen poco control de las cadenas de razones que producen. Se trata de ayudarlos para que realicen encadenamientos de razones y tengan mayor control sobre ellas, pretendiendo que las recuperen y reflexionen sobre las mismas.
- Los estudiantes del ciclo de educación básica A están en capacidad de estudiar secuencias de datos e identificar patrones de variación que tienen una variable única. Se trata entonces de apoyarlos a encontrar los patrones en secuencias que incluyen dos variables, y para que en situaciones sencillas no se limiten a resolver el caso particular, sino den cuentan de una regla general que justifique todos los casos posibles. Además que ofrezcan razones que justifiquen la necesidad lógica del patrón.
- La capacidad de razonamiento de los educandos crece en ambientes de aprendizaje en los que se los estimula a razonar, tanto en momentos de trabajo individual como grupal. Esto se logra:
  - ✓ Invitándolos a que describan y ofrezcan razones de lo que dicen y hacen. Apoyándolos para que cada vez lo hagan de forma más clara y precisa. Unas veces se les pedirá que lo hagan en forma oral y otras por escrito. Ayudándoles a mejorar sus razones, buscando que tengan mayor pertinencia y mayor fuerza argumentativa. Incluso es necesario que ellos escuchen, convaliden y/o refuten el punto de vista del otro, pidiéndoles que intenten comprender lo que hacen y dicen otros y que se esfuercen

en dar cuenta de la validez de las ideas que ellos expresan.

- ✓ Ayudándoles a reflexionar sobre sus propias razones y las de otros. Que encuentren los límites de éstas, de acuerdo con la situación-problema que se aborde o los acuerdos conceptuales que se están construyendo en el aula. En algunos casos conviene que el profesor muestre los límites de un razonamiento, pues esto puede ayudar a algunos estudiantes a caer en cuenta de ellos y comprender con pleno sentido el vacío de sus razones.
- ✓ Impulsándolos de forma permanente a problematizar, a inventar sus propias alternativas de solución, a compartirlas en pequeños grupos, a explicarlas y justificarlas.
- ✓ Orientándolos para que controlen la pertinencia de sus propias alternativas y procedimientos.
- ✓ Elaborar situaciones-problema donde el alumno tenga que tomar decisiones bajo circunstancias de incertidumbre. Otras donde tenga que llegar a conclusiones a partir de inferencias.

4.1.2. Modelación

En el primer capítulo se dijo que el proceso de modelación está presente en todo proceso de construcción del conocimiento, más aún, se afirmó que este eje se deriva del hecho de reconocer que la modelación es una de las estrategias que los humanos utilizamos para construir tanto el conocimiento cotidiano como el científico.

Si bien en la literatura es común vincular el proceso de modelación al estudio de hechos más o menos amplios que involucran múltiples variables, conviene aceptar con un significado un poco más débil que el niño del ciclo de educación básica A da muestra de acciones de modelación cuando no sólo se le enfrenta a resolver un problema en el que debe obtener la respuesta a esa situación particular, sino que se busca que incluya muchos otros casos distintos de múltiples contextos que se pueden resolver por el mismo procedimiento; dicho en otros términos, el niño del ciclo de educación básica A modela cuando se le ayuda a tomar conciencia de la estructura común que comportan muchas situaciones.

Un ejemplo puede ayudar a entender estas posibilidades de modelación para este ciclo: cuando el niño no sólo resuelve problemas particulares como comparar dos cantidades para encontrar en cuánto excede la mayor a la menor, sino que también reconoce que hay múltiples y variados problemas que a pesar de las diferencias en los contenidos que trabajan y las formas lingüísticas en que se enuncian, todos ellos se dejan modelar mediante la resta de la cantidad mayor menos la cantidad menor.

Los estudiantes que inician este ciclo poseen un pensamiento aditivo elemental, razón por la que aunque logran resolver algunos problemas aditivos simples, aún tienen dificultad para tomar conciencia de que pueden modelarse mediante la suma y la resta de naturales, especialmente aquellas situaciones inversas. En el caso de las situaciones multiplicativas sus elaboraciones son más rudimentarias, muchas veces las resuelven por sumas reiteradas. Conviene en este ciclo apoyar a los alumnos para que progresivamente usen expresiones que involucren operaciones aditivas y multiplicativas entre naturales para modelar situaciones que requieran combinar operaciones aditivas, multiplicativas y combinaciones de estas. De igual forma ayudarles a extender estas construcciones en contextos distintos a los de cantidades discretas, como contextos de medida y de combinatoria.

En el proceso de aprender a hacer representaciones variadas de una misma situación (representaciones gráficas tipo imagen o gráficos de barras, o tabulares), es importante apoyarlos para que logren conocer qué situaciones distintas pueden tener formas semejantes de representación (la variaciones de los valores crecen o decrecen, o crecen y decrecen siguiendo los mismos patrones de variación).

Los diagramas de árbol en este ciclo son una potente herramienta para modelar situaciones que requieren la composición de correspondencias múltiples (situaciones que exigen la sucesión de varias multiplicaciones); éstas son el punto de entrada para acceder a un pensamiento potenciativo.

Finalizando este ciclo conviene hacer representaciones tabulares y gráficas de tipo cartesiano de situaciones sencillas de proporcionalidad directa e inversa. Ayudándolos a observar los modificaciones que tienen estas representaciones al modificar las relaciones de variación entre ellas (por ejemplo, ¿cómo varían las representaciones que se hacen de una situación de variación directa al modificar el valor de variación por unidad?).

La capacidad de modelación de los estudiantes crece en ambientes de aprendizaje en los que se los estimula a:

- Problematizar situaciones abiertas, invitándolos a hacerse preguntas pertinentes y relevantes, a determinar qué aspectos deben tenerse en cuenta para ofrecer soluciones a las preguntas que se formulen, a reconocer bajo qué condiciones la solución ofrecida es la más razonable para la situación.
- Invitándolos a hacer modelos gráficos y físicos de una situación. En un primer momento enfrentando situaciones que requieren de modelos que no exigen cuantificación sino la combinación ordenada de pasos para obtener la solución, y poco a poco introducir situaciones en las que sea necesario y posible, mediante métodos sencillos, hacer control cuantitativo de las relaciones.
- Invitándolos a reflexionar sobre las variaciones que tendrían la solución de una situación y las representaciones que se hagan de ésta al modificar uno a varios datos o condiciones.
- Invitándolos a imaginar la diversidad de situaciones que satisfacen una representación (tabular, gráfica o numérica).

4.1.3. Comunicación y representación

El eje de comunicación y representación pretende asignarle un lugar privilegiado al papel del lenguaje verbal y no verbal en la construcción del conocimiento matemático escolar, y en las maneras como los maestros crean contextos y situaciones comunicativas en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta y en la comprensión de la matemática.

Los hechos que se pueden asociar con la comunicación y la representación en las matemáticas escolares son amplios y diversos, entre ellos están:

- Los procesos de comprensión (lectura y escucha) del lenguaje verbal y no verbal del sujeto en la construcción del saber matemático escolar.
- Los procesos de producción (escritura y habla) de los sujetos que participan en la actividad matemática.

- Las maneras como el sujeto se representa mentalmente las situaciones y problemas matemáticos relacionados con los diferentes sistemas conceptuales y las representaciones semióticas utilizadas para comunicarlos
- La interacción, el intercambio y la negociación de significados y sentidos en el aula, en particular el ambiente y los diversos contextos y relaciones que se generan para estimular y posibilitar esta negociación.
- Las formas de expresión de las emociones y sentimientos que el sujeto activa en la construcción de ese conocimiento escolar.

¿Cuáles de estos hechos están presentes en un niño del ciclo de educación básica A y cuáles no? ¿En qué nivel de elaboración? Compete a los educadores plantearse hipótesis y pensar formas de indagación que permitan una comprensión cada vez más precisa sobre el pensamiento y el lenguaje de sus alumnos, para así diseñar situaciones didácticas que favorezcan avances en sus construcciones.

Los niños en este ciclo ya han consolidado la capacidad de decodificación del sistema de escritura del lenguaje natural y han accedido al reconocimiento y diferenciación de algunos símbolos matemáticos básicos (notación y enunciación numérica, aproximación a la sintaxis del sistema decimal de numeración, lectura de signos para representar algunas operaciones y relaciones entre naturales). Así mismo con la lectura y escritura de algunos textos los alumnos acceden a las estructuras semánticas, sintácticas y pragmáticas, por ejemplo pueden identificar y enunciar en los textos descriptivos algunas marcas espaciales, en los textos narrativos marcas temporales y en los textos argumentativos cierto tipo de conectores causales. En relación con los problemas matemáticos, por ejemplo, producto de la enseñanza escolar, los educandos ya se han hecho a marcas textuales que les permiten saber de que se trata de una estructura textual propia de la matemática y, más aún, les indican cuándo hay que sumar, restar o multiplicar. Sería recomendable plantearle diversidad de textos propios de las matemáticas que les posibiliten hacerse a la construcción y reglas propias de estos, sin que se les enseñen las claves para resolverlos; esto en cambio de ser un facilitador del pensamiento lo limita. Así mismo, los estudiantes de este nivel manejan algunos léxicos particulares y utilizan algunas estrategias que garantizan ciertos niveles de coherencia y cohesión a nivel local, que evidencian que su pensamiento aún requiere herramientas cognitivas y lingüísticas para hacerse a la totalidad y la globalidad de los textos.

Se proponen aquí algunos aspectos que conviene enfatizar durante este ciclo teniendo en cuenta las características del desarrollo tanto del lenguaje como de la comprensión de los conceptos matemáticos que se trabajan. Estos son un referente para que cada docente en su contexto de clase las profundice, amplíe, complemente y precise:

Es característico que los niños de este ciclo puedan resolver problemas y anticipar la operación u operaciones necesarias para obtener la solución en caso de problemas sencillos con los que ya están familiarizados, pero tienen problemas con problemas que les sean novedosos, especialmente se les dificulta representar simbólicamente la expresión a su solución y explicar verbalmente los procedimientos utilizados para su resolución. En parte esto ocurre ya que cada vez que se enfrentan a la comprensión de un concepto con mayor complejidad requieren reconstruirlo ya logrado en un nivel inferior. Aunque pueden representarse mentalmente la situación, interpretarla y resolverla correctamente aún se les dificulta tomar conciencia de lo que hacen y por eso no pueden comunicarlo. Se recomienda entonces que los docentes enfrenten a los alumnos a múltiples y variadas experiencias que les permitan narrar, describir, explicar, argumentar lo que hacen valiéndose del lenguaje común y poco a poco representándolo simbólicamente.

Apoyar a los estudiantes para que produzcan sus propias escrituras revela sus niveles de representación interna y los procedimientos utilizados. El maestro debe reconocer y valorar las diversas escrituras espontáneas, promover su circulación y contrastación. Preguntarse por el momento óptimo para presentar las escrituras propias de las matemáticas (palabras, signos, sistemas simbólicos), un principio orientador, en este ciclo, podría ser que el simbolismo matemático aparezca como un momento posterior a la construcción intuitiva del concepto y a la capacidad de expresarlo haciendo uso del lenguaje común. Se propone hacer del aula un espacio social y comunicativo en el que circulen diferentes niveles de representaciones (enactivos, icónicos y simbólicos), haciendo uso de diferentes registros (lenguaje común o simbólico), diferentes géneros textuales (relatos y narraciones, textos instruccionales, informativos, argumentativos, explicativos, descriptivos, diálogos, etc.).

Plantear problemas de enunciación verbal desligados de la acción y de lo inmediato, pero cada vez que se introduzca un nuevo concepto se ha de volver a enunciarlos de manera directa y a vincularlos con la experiencia concreta. De forma progresiva conviene variar la enunciaciones de los problemas, variando a propósito el orden de la enunciación para hacer que éste no coincida con el orden de la acción; de igual forma, recurrir conviene ayudar a los estudiantes a comprender problemas con la misma estructura lógica pero con enunciaciones diversas, que tengan formatos lingüísticos más "formales". Así mismo, es importante invitarlos a inventar y resolver problemas con diferentes estructuras lingüísticas, problemas abiertos y/o cerrados, lo que los lleva a manifestar un lenguaje con poder generalizador, cada vez menos ligado a las situaciones concretas (independencia del contexto). En otras palabras, un lenguaje más formalizado.

Incorporar en el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos diversas formas de registro y representación y la necesidad de hacer conversiones de un sistema de representación a otro. El paso de representaciones basadas en el lenguaje común a representaciones esquemáticas y más resumidas (representaciones "simbólicas" a mitad de camino), apoyadas en diagramas, dibujos o gráficas hasta lograr 'verdaderas' representaciones simbólicas, ayuda a los estudiantes a complejizar sus construcciones. El uso de diferentes sistemas de representación para expresar la misma idea (la mitad, un medio, ½, 0,5) les ayuda a hacer transformaciones y conversiones de las representaciones y ampliar el significado de los conceptos.

Invitar a los alumnos a participar, discutir y colaborar en la construcción y negociación de un conocimiento compartido. Es preciso promover formas de conversación en las que aparezca la crítica y donde haya lugar al cuestionamiento, al debate y a la justificación. Situaciones dialógicas donde se haga visible el razonamiento, se establezcan acuerdos y se tomen decisiones conjuntamente para construir nuevas elaboraciones más consistentes. Favorecer estas situaciones requiere asumir un estilo de comunicación no autoritario, ni unidireccional, en el que se da lugar al respeto, la tolerancia, el reconocimiento y valoración de las diferentes perspectivas.

La práctica comunicativa del aula debe tener un sentido que lleve a los aprendices a construir su ¨conciencia lingüística”, de manera implícita y/ o explícita, ya sea mediante el uso o la reflexión sobre el lenguaje y los procesos comunicativos que allí ocurren. Una práctica acompañada permanentemente de la reflexión sobre los procesos discursivos, en la que el docente tome distancia sobre su propio lenguaje y los efectos que tienen en el aprendizaje de sus alumnos (su estructura, sus contenidos, sus funciones, y las estrategias lingüísticas más frecuentemente usadas, preguntas, silencios, pistas, claves) y en la que a la vez estimule esta reflexión con el grupo. Esto les permite hacerse a la pragmática del lenguaje, explicitar sus intenciones comunicativas y las reglas propias del lenguaje del aula: como cuándo preguntar, la importancia de escuchar y respetar turnos a la hora de participar, el manejo de las instrucciones y la relación con la acción, la diferenciación del lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas (con sus propias palabras, vocabulario, símbolos y signos), el sentido de la escritura para registrar, llevar cuentas y comunicar. Que los alumnos tomen conciencia que el lenguaje comunica, que es una herramienta para pensar y para relacionarse con otros.

Reconocer que el cuerpo comunica. Con las posturas corporales, los gestos, el movimiento de las manos, las miradas, los silencios, los matices y entonación de la voz, el maestro y los alumnos comunican ideas y sentimientos. Se favorece así la expresión de las emociones relacionadas con la matemática y su aprendizaje, tales como ansiedad, miedo, inseguridad, placer y satisfacción al descubrir una resolución acertada, disfrutar y contemplar la estética, lo bello de un razonamiento bien hecho.

Retomar los principios de cantidad, calidad, relación, modalidad que plantea el sociolingüista Grice[46] como fundamentales para la cooperación en la comunicación y aplicar algunas reglas lingüísticas básicas para la producción del discurso oral (que en la academia cada vez ha de acercarse más al escrito) y del discurso escrito: claridad, precisión, coherencia, cohesión. Relacionar estas reglas con las del discurso formalizado de las matemáticas (brevedad, precisión, disposición espacial).

4.2. Subcampos del Pensamiento Matemático

Así como se hizo con los ejes y las estrategias, en estos numerales se tomará cada subcampo y se recomendarán unos énfasis e ideas para el aula en este ciclo.

4.2.1. Pensamiento numérico

Los niños que inician este ciclo generalmente han consolidado su pensamiento aditivo al punto que enfrentan con algún éxito problemas aditivos simples y compuestos directos (de composición y de descomposición), aunque posiblemente resuelven algunos problemas inversos, caen en dificultad cuando el problema hace referencia a contextos que les son poco familiares o el rango numérico se eleva más allá de las posibilidades de sus intuiciones. En el caso del pensamiento multiplicativo sus elaboraciones son más elementales, todavía están en el tránsito de abordar problemas multiplicativos mediante sus recursos aditivos, aunque algunos niños parecieran tener mayores elaboraciones por

46 Las máximas que plantea el sociolingüista Grice (citado por Escandell, 1993: 92) en su principio de cooperación en la comunicación son: cantidad (información requerida), calidad (veracidad o plausibilidad, sinceridad, honestidad), relación (relevancia), modalidad (el modo, la claridad, evitar la oscuridad, la ambigüedad, brevedad, orden).

el hecho de aplicar los procedimientos multiplicativos a problemas estereotipados en los que han recibido entrenamiento.

Conviene en este ciclo enfatizar en situaciones que enfrenten a los educandos a problemas inversos y compuestos, y en los últimos grados del ciclo de educación básica A extender a situaciones que además exijan combinar operaciones aditivas (de adición y sustracción) y multiplicativas (multiplicación y división).

En cuanto al sistema decimal de numeración los niños que inician este ciclo todavía se apoyan en significados aditivos y significados aditivos-multiplicativos para hacer cuentas en situaciones que les exigen y les ofrecen la oportunidad de poner en juego sus verdaderas comprensiones de la numeración, a pesar de que en algunos casos se les vea ejecutando los procedimientos en los que han recibido entrenamiento.

Es importante en este ciclo de educación básica apoyar a los estudiantes para que hagan cuentas con sus propios procedimientos, ya que así van consolidando sus construcciones sobre la numeración. Parte del esfuerzo central consistirá en ayudarlos a desarrollar un pensamiento multiplicativo que les permita hacer composiciones de correspondencias múltiples[47] y operar con estas de tal manera que puedan acceder a una comprensión polinomial de los numerales (ej. 2.345 entendido como 2 unidades de 10 de 10 de 10, 3 unidades de 10 de 10, 4 unidades de 10 y 5 unidades de 1, o escrito en forma más simbólicamente 2.345 como $2*10^3 + 3*10^2 + 4*10^1 + 5*10^0$).

Este ciclo se caracteriza porque los estudiantes se inician en la construcción de los fraccionarios; conviene empezar por ayudarlos a consolidar la capacidad de realizar relaciones multiplicativas entre cantidades discretas y continuas, expresables con naturales y coordinar las relaciones directa e inversa, al igual que aplicar y operar con operadores multiplicativos naturales. La posibilidad de comprensión de una relación del tipo a/b se soporta en un pensamiento capaz de componer dos relaciones multiplicativas expresables con dos naturales "a" y "b", donde alguno de los dos es múltiplo del otro (ej. A es 3 veces mayor que B y B es 12 veces menor que C, al componer estas dos relaciones se puede afirmar que A es un cuarto de C). De manera que conviene elevar el pensamiento multiplicativo de los alumnos al punto que puedan manejar estas composiciones en diferentes contextos, para que logren entender composiciones de relaciones multiplicativas y operadores multiplicativos, que no son expresables con un natural sino con números de la forma a/b. En este ciclo se introducen los decimales y conviene hacerlo como representaciones decimales de los fraccionarios y ligándolas a cantidades de una magnitud.

De forma análoga al progreso que tiene que hacer el educando de este ciclo en lo multiplicativo, también tiene que hacerlo con las relaciones aditivas y operadores aditivos naturales. La posibilidad de la comprensión y la capacidad de operar con los números negativos y positivos se soporta en un pensamiento capaz de componer dos relaciones y dos operadores aditivos naturales (Ej. A es 3 unidades mayor que B y B es 5 unidades menor que C, al componer estas dos rela-

47 Se tiene una correspondencia múltiple cuando se hace corresponder un elemento con varios otros (en una caja se empacan tres bolsas). La composición de correspondencias, como su nombre lo indica, cuando se componen dos o más de estas correspondencias. Ejemplo, en una caja caben tres bolsas y a su vez en una bolsa caben 12 colombinas. ¿Cuántas colombinas hay en una caja? La estructura de este problema es la misma a la que da lugar la equivalencia entre unidades en el sistema decimal de numeración, una centena equivale a 10 decenas y a su vez una decena equivale a 10 unidades, ¿a cuántas unidades equivale una centena?

ciones se puede afirmar que A es 2 unidades menor que C); de manera que conviene elevar el pensamiento aditivo de los estudiantes al punto que puedan manejar estas composiciones en diferentes contextos, para que logren entender composiciones de relaciones y operadores aditivos que no son expresables con un natural sino con números positivos y negativos.

La complejización del pensamiento numérico se promueve cuando los alumnos inventan sus propios procedimientos para resolver problemas, cuando comparan las soluciones, discuten sobre ellas y se los invita a buscar procedimientos más elaborados. El camino de entrenar a los niños en la resolución de problemas ofreciéndoles prototipos poco favorece el desarrollo de su pensamiento numérico. Resulta más enriquecedor que se enfrenten a múltiples y variadas situaciones plenas de significado y sentido para ellos. El significado de las operaciones se complejiza a medida que se aplican en diferentes contextos. Unas veces las situaciones pueden ser abiertas, otras veces conviene resolver problemas de enunciado de tipo cerrado. Unas veces el educando tendrá que inventar los problemas y escribirlos, y el trabajo que se promoverá en el aula no será únicamente el de resolverlo sino discutir la precisión y claridad del enunciado. Trabajar sobre las variaciones que se podrían producir al procedimiento seguido y a la respuesta dada si se modifican ciertas condiciones a los problemas ayuda a los estudiantes a modelar las situaciones.

Hay que evitar trabajar siempre con problemas que tienen datos conocidos, conviene enfrentar a los alumnos a problemas en los que los datos son cantidades desconocidas (sin necesidad de expresarlas mediante letras); estos problemas se pueden introducir desde temprana edad y ayudan al niño a que no se quede resolviendo el problema singular, sino más bien vea en ellos clases de problemas. Por ejemplo: los padres de los alumnos del curso vienen al bazar, ellos traen un billete de $20.000, y entre una lista de 10 artículos cada uno escoge dos diferentes, ¿cómo se podrá saber cuánto dinero le sobra a cada uno?

La habilidad para hacer cuentas no se reduce al aprendizaje y ejercitación de los algoritmos de las operaciones, más bien crece cuando se invita a los estudiantes a seguir sus propios procedimientos. En un comienzo no hacen mayores exigencias para que los expliciten, pero poco a poco y según sus progresos, se les pide que expliquen los procedimientos seguidos y que produzcan escritos cada vez más organizados, claros y precisos.

4.2.2. Pensamiento métrico

Las nociones de magnitudes como longitud, superficie, volumen, peso, capacidad o duración, etc. surgen y se complejizan en variadas acciones que hacen los niños cuando comparan los objetos y los hechos. Al comienzo, en ausencia del número y de la medida son de tipo cualitativo, sólo permiten valores como mucho, poco, bastante, nada, etc. o relaciones del tipo "…es más que….", "…es menos que…" Con los progresos en el número y en la medida, las comparaciones llegan a ser cuantitativas (ver párrafo correspondiente a este subcampo en el segundo capítulo).

El niño que inicia este ciclo posee nociones básicas de algunas magnitudes como longitud, peso, capacidad, duración y manejan algunas unidades convencionales. Posiblemente también hagan conversiones entre algunas de esas unidades y tengan cierta capacidad para estimar. En este ciclo se trata de enriquecer estas intuiciones de los alumnos mediante la vivencia de una gran variedad de experiencias de medida. A continuación se sugieren algunas ideas para tenerlas presentes al pensar en el diseño y desarrollo de experiencias que enriquezcan el pensamiento métrico de los educandos.

Como ya se ha dicho, la enseñanza deberá orientarse a enriquecer las experiencias de medida de los alumnos, como forma de ayudarles a complejizar su pensamiento métrico. Cuando miden ganan capacidad para apreciar qué tanto puede ser el valor de una medida, cuál es entonces la unidad más conveniente a utilizar. Toda nueva unidad que se introduzca debería conllevar experiencias en las que se use y se puedan comparar con otras ya conocidas. Hay que invitarlos a conocer las unidades que se utilizan en la tienda, en los productos que se venden en los supermercados, a apreciar su cantidad; también a hacer estimaciones de medidas de distancias entre puntos conocidos y de las dimensiones de diferentes espacios, de la cantidad de diferentes productos, etc. A los niños les resulta interesante conversar sobre la información que se encuentra en las etiquetas de los productos. En estas experiencias el profesor siempre encuentra posibilidades de involucrarlos en sencillos estudios en los que hay que recoger y sistematizar datos (sobre las estaturas, pesos de los alumnos del curso y de los miembros de la familia). Conviene también que hagan comparaciones de las medidas entre objetos y expresar una en términos de las otras, por ejemplo: en función de las alturas de los alumnos, determinar aproximadamente alturas de las paredes, del profesor; en función del peso de una naranja determinar el peso de una papaya.

En necesario enfrentar a los estudiantes a problemas en los que tengan que tomar decisiones sobre la unidad o unidades más convenientes que deben utilizar, de acuerdo con el tamaño de la magnitud que van a medir y la precisión que es deseable alcanzar.

Es fundamental orientar a los educandos en la utilización adecuada de los instrumentos para que las medidas sean bien tomadas. Por ejemplo. en el caso de la medida de longitudes colocar el instrumento en dirección paralela a la línea que se mide; al medir una arista de un objeto o simplemente un segmento de una recta con regla tener la precaución de hacer coincidir el punto cero del instrumento en el extremo que se toma como inicial. Debido a que el pensamiento de los alumnos trabaja sobre la cantidad discreta, les es difícil reconocer que el primer centímetro de la regla va del punto 0 al punto 1, para este segmento no existe, ellos prefieren ver el “primer centímetro” a partir de 1.

Parte del proceso de apoyar a los estudiantes en la consolidación de la noción de una magnitud, consiste en resolver problemas en los que hagan comparaciones de la cantidad de esas magnitudes. Conviene primero utilizar unidades no convencionales antes de introducir las convencionales. La vivencia de usar estas medidas abre la posibilidad de experimentar la necesidad de establecer convenios para utilizar unidades comunes. Es importante acercar progresivamente a los niños a la historia de la medida, pero no se trata de dar datos sueltos para memorizar, sino brindar la posibilidad de apreciar que los progresos de la medida han estado ligados a la necesidad de resolver problemas prácticos; de comparar las unidades y procedimientos utilizados por distintas civilizaciones y de una época a otra.

Es importante ligar la comprensión de los sistemas de unidades a los progresos de los educandos en el sistema decimal de numeración y ayudarles a reconocer las semejanzas que hay en sus estructuras. De igual forma hacer notar la diferencia que existe entre el sistema decimal de numeración y los sistemas de medida no decimal. En los cursos más avanzados del ciclo de educación básica A, los procesos de medida son un soporte importante para la construcción de los números fraccionarios y para la comprensión de las diferentes formas de representarlos (como fracciones y como decimales).

Situaciones problemáticas que inviten a los niños a elaborar instrumentos son necesarias, pero éstas no deben abordarse como situaciones en las que los niños se limiten a reproducir instrumentos ya existentes, sino como invitaciones a crear por sus propios medios soluciones a una necesidad. La invención de instrumentos conlleva problemas de construcción de escalas. La construcción y lecturas de escalas son muy útiles no sólo por lo que aportan en términos del pensamiento métrico sino porque involucran el pensamiento proporcional. Aquí se encuentran excelentes oportunidades para que los estudiantes se enfrenten a problemas prácticos en los que puedan darle significado a la proporcionalidad.

En este ciclo de educación, los alumnos se enfrentan al problema de construir las nociones de la amplitud de un giro y de un ángulo. Los niños que inician el ciclo tienen ideas incipientes de giros sobre su propio cuerpo (giros de una vuelta y de media vuelta, a la derecha y a la izquierda, incluso algunos logran manejar el de un cuarto de vuelta), estas ideas se pueden extender a giros de un octavo de vuelta. Aprovechando los progresos de los educandos en números fraccionarios ligados a su significado como partidor se pueden extender sus comprensiones a otros giros de menor valor. Se trata de ayudarles a realizar estos giros, a representarlos gráficamente, pero sobre todo a operar con ellos. Ganar capacidad para imaginarse cómo sería la posición final de un objeto después de un giro y anticipar el resultado de la composición de dos o más giros que se hacen uno después del otro.[48] En términos más generales, se trata de desarrollar un pensamiento que les permita operar aditivamente con los giros. A partir de estas elaboraciones alcanzadas con los giros y con los progresos en fraccionarios, los niños de los grados superiores de este ciclo podrán avanzar hacia la idea de ángulo y de su amplitud, relacionando representaciones fraccionarias de giros y el sistema sexagesimal.[49]

Otras adquisiciones importantes en este grado son las nociones de área y volumen. Nuevamente aquí se insiste en que la comprensión de estas magnitudes no se agota en la capacidad de aplicar fórmulas y de manejar unidades, y menos, que éste sea el punto de partida. Los niños que inician este ciclo están en capacidad de inventar sus propios métodos para decidir cuál de dos terrenos, dos paredes, dos tablas tiene mayor área. Conviene que vivan experiencias en las que les sea posible resolver preguntas como estas mediante procedimientos de comparación directa y después de recubrimiento.[50] Inicialmente ejecutar la acción completa de recubrir la superficie de la región a medir con un patrón y después pasar a hacer cálculos que permitan saber cuántas veces hay que repetir el patrón para lograr recubrir la región a medir. Cuando se haya ganado una adecuada comprensión de la magnitud que se está midiendo y de los métodos que se están utilizando tiene sentido pasar a formas de cálculo basadas en las fórmulas.

48 ¿Cuál es la posición final de la figura ▼ después de un giro de media vuelta hacia la derecha seguido de un cuarto de vuelta a la izquierda?

49 Por ejemplo un giro de ¼ de vuelta equivale a un giro de amplitud de 90º. Uno de 1/8 a 45º, etc.

50 Recubrir las superficies a medir con un objeto que se toma como unidad.

El paso del cálculo de las unidades utilizadas para recubrir una superficie al cálculo mediante una fórmula, supone avanzar en la forma de representar la medida del área como una cantidad discreta a una cantidad continua. Es diferente representar mentalmente el problema de cuántos cuadrados de 1 cm de lado se utilizaron para recubrir la región encerrada por un rectángulo al que le caben 4 de estos cuadrados a lo largo y 3 a lo ancho, que representar la idea del área de un rectángulo cuyas dimensiones son 3,2 cm de largo y 2,5 cm de ancho. Estas transiciones de lo discreto a lo continuo requieren tiempo para brindar las experiencias adecuadas. Saltos bruscos de una forma a la otra explican en gran medida los vacíos que tienen los estudiantes en relación con la idea de área.

El cálculo del área puede ser abordado como el esfuerzo de hacer transformaciones a una figura para convertirla en otra de la que se conoce la fórmula para calcular el área y con la cual se pueda establecer alguna relación de equivalencia entre las áreas de las dos figuras, y no simplemente la aplicación de una fórmula. Por ejemplo, utilizar un rectángulo para calcular el área de un triángulo rectángulo. Durante un buen tiempo conviene que el método de cálculo de áreas de las figuras sea este. Una vez consolidado este método, podrá avanzarse al conocimiento de las fórmulas. Todos los esfuerzos que se hagan para ayudar a los estudiantes a hacerse a ideas dinámicas del área de una figura son importantes, de una parte ayudan a los alumnos a reconstruir una y otra vez la idea de conservación del área y de otra, a comprender formas de variación del área en relación con sus dimensiones. Por ejemplo, problemas en los que se requiera estudiar la variación del área de una figura en relación con la variación de una de sus dimensiones mientras permanece constante la otra; hacer representaciones tabulares y cartesianas de estas variaciones ayuda a los educandos a trascender el aprendizaje mecánico de procedimientos. Siempre son útiles problemas en sentido inverso, por ejemplo, una vez calculada el área de un triángulo, construir otros triángulos diferentes de las mismas dimensiones que tengan la misma área. ¿cuántos triángulos de estos se pueden construir? Al establecer relaciones entre el perímetro y el área, por ejemplo, se pueden construir rectángulos diferentes del mismo perímetro pero áreas diferentes y viceversa.

La construcción de la noción de volumen, supone seguir un procedimiento semejante, aunque en este ciclo convenga limitar las situaciones a unas cuantas figuras sencillas, como paralelepípedos.

4.2.3. Pensamiento espacial

Los estudiantes que inician este ciclo establecen relaciones de localización más allá de su espacio inmediato, con relativa flexibilidad, para dar cuenta de la posición de los objetos. También tienen relativa capacidad para coordinar varias relaciones de estas y hacer inferencias, aunque sus razonamientos los tengan que hacer sobre la base de imaginarse las configuraciones de los objetos que involucran. Igualmente cuentan con una relativa capacidad para elaborar e interpretar croquis, planos y mapas sencillos de espacios conocidos y son capaces de reconstruir trayectos en espacios conocidos con algunas limitaciones. En este ciclo los esfuerzos han de orientarse a ayudar a ampliar y consolidar estas capacidades, por eso es importante que los alumnos de este ciclo vivan experiencias en las que tengan que coordinar dos sistemas de referencia de sitios distintos aunque próximos, para construir un sistema más amplio que los incluya. Uno de los esfuerzos de ampliación de los sistemas de referencia debe estar dirigido al manejo de sistemas más universales, como el de puntos cardinales.

Las representaciones pictóricas como croquis y mapas inicialmente no tiene un manejo de una métrica; ésta se aborda de forma muy cualitativa (más cerca, más lejos o igual de cerca). Razón por la que poco a poco ha de introducirse una métrica exacta, con algún control de la proporcionalidad entre el espacio representado y el espacio real. Los estudiantes de este ciclo logran manejar, con relativa facilidad, escalas con razones 1:n, en las que les basta aplicar un operador que amplía o un operador que reduce, pero tienen dificultad cuando la razón entre las escalas es de la forma n:m, porque éste les exige aplicar un operador de la forma m/n, que involucra un significado de los fraccionarios como razón. Por eso conviene en este ciclo consolidar una base intuitiva sólida con razones sencillas, antes que introducir un procedimiento mecánico para hacer cálculos. El manejo de representaciones gráficas a escala se constituye en un elemento importante para favorecer un pensamiento proporcional.

Los educandos que inician este ciclo logran reconocer los componentes de una figura plana (elementos como número y longitud de sus lados, número de vértices, inclinación relativa de sus lados, aunque esto último sin control exacto debido a la carencia de la idea de ángulo), pero no establecen relaciones entre estos elementos y muchas veces basan sus juicios sobre las percepciones globales de las representaciones icónicas de las figuras. Por eso consideran que algunas relaciones entre los elementos de una figura cambian por variaciones en su posición. Conviene en este ciclo apoyar a los alumnos para que vivan experiencias de transformación de las figuras y de sus partes; que identifiquen cuáles no las alteran y cuáles sí, y en este último caso, qué componentes y relaciones varían y cuáles permanecen constantes. Las ideas de congruencia y semejanza han de surgir de la reflexión sobre estas experiencias. Con los progresos de los estudiantes en el manejo de los giros y de la idea del ángulo, es necesario descomponer la figura en sus elementos y estudiar las relaciones que se dan entre ellos.

Diferentes representaciones icónicas de las transformaciones de las figuras y sus partes y de las relaciones entre éstas (como la de jerarquías inclusivas a la manera de mapas conceptuales, de esquemas o diagramas de Venn), ayudan a los estudiantes a imaginarse dichas transformaciones, a comprender las relaciones que entre ellas se pueden establecer y a anticipar sus resultados. Con estos logros poco a poco el alumno podrá pensar sobre estas transformaciones, buscar explicaciones, hacer inferencias y elaborar razonamientos en los que hay intentos de validar sus afirmaciones, ya no ligados exclusivamente en la evidencia empírica, sino soportándose en afirmaciones que han sido aceptadas en el grupo.

El uso de materiales como el geoplano, el tangram o técnicas como el plegado, son de vital importancia en tanto que ayudan a los estudiantes a realizar transformaciones y ganar habilidad para controlar sus resultados. Sin embargo, esta es una habilidad práctica, muy ligada a las condiciones en las que surge. Razón por la cual y de forma complementaria conviene enfrentar a los educandos a situaciones problemáticas que les permitan transferirlas a otros contextos. El uso de software como *Cabri* es un apoyo a la mente para imaginarse las transformaciones, ya que posibilita ver (literalmente) los cambios que se producen y lo que permanece constante. Pero hay que ayudar a "ver con el pensamiento" y encontrar las razones de por qué se producen los cambios y por qué permanecen otros elementos y otras relaciones. El empleo de los recursos en el aula se complementa con el tipo de situaciones o preguntas que el docente genere, para que el alumno pueda enriquecer las relaciones que establece con éstos, y no quede solo en el acto de la manipulación.

Los estudiantes que inician este ciclo logran identificar los elementos de la superficie que limita un sólido sencillo. Conviene ampliar esta capacidad de reconocimiento a sólidos más complejos (pasar de la exploración de paralelepípedos a pirámides, cilindros y conos), haciendo desarrollos de los planos de objetos tridimensionales (de prismas y de pirámides), identificar las vistas, anticipar los resultados de transformaciones y manejar la perspectiva. Conviene enfrentar a los alumnos a construcciones de modelos físicos con el fin de estimular su imaginación.

4.2.4. Pensamiento variacional-algebraico

En este ciclo se trata de estudiar a nivel cualitativo fenómenos de dependencia entre dos variables en los que los niños tengan la posibilidad de hacer diferentes representaciones, de identificar y expresar en diferentes registros regularidades de la variación de cada una de las variables y de su dependencia. Se enfatizará en las variaciones de proporcionalidad directa e inversa, en estos casos conviene hacer aproximaciones a representaciones analíticas.

Conviene hacer experimentos en los que los estudiantes tengan la posibilidad de comparar, especialmente mediante gráfica cartesiana,[51] variaciones que dan lugar a líneas rectas que pasan por el origen, con las que no pasan por el origen y con otras que dan lugar a curvas. Que los estudiantes puedan explicarse por qué la línea recta muestra el incremento constante en la variable dependiente para incrementos iguales de la dependiente.

Es a partir del análisis de estas situaciones en la que se propone ayudar a los alumnos a construir un pensamiento proporcional. Inicialmente harán interpolaciones y extrapolaciones mediante recursos aditivos y procedimientos del valor unitario,[52] antes de poder introducir procedimientos basados en compresiones de la igualdad de razones. Esta ruta para acceder a la proporcionalidad directa es más provechosa que simplemente enseñar regla de tres o teoría de las proporciones, por estos dos caminos cuando más aprenden técnicas pero no desarrollan un pensamiento proporcional. Es importante tener en cuenta que una vez que construyen el pensamiento proporcional se produce una especie de supra-generalización y se aplica este procedimiento en casos en los que la relación de dependencia no es proporcional; de ahí la importancia de introducir situaciones que no tengan esta dependencia para que pueda contrastarse de la diferencia y tomar precauciones.

En estas experiencias debe aprovecharse el registro de datos para el uso de fraccionarios en sus diferentes formas de representación. A medida que se avanza en el pensamiento proporcional, se introducen las nociones de porcentaje mediante transformaciones de escalas (el porcentaje es una escala de 1 de100).

En este ciclo a medida que los estudiantes avanzan en su capacidad de identificar

51 Generalmente en la enseñanza se aplaza a la secundaria la representación cartesiana de fenómenos de variación por dos razones: una porque los niños al no haber construido todavía los números reales se considera falta de rigor representar magnitudes continuas y porque sólo se puede trabajar el primer cuadrante.

52 Se busca el valor de la variable dependiente cuando la variable dependiente vale 1 y se usa esta información para calcular cualquier valor.

regularidades y expresarlas en lenguaje verbal, se les apoya para que utilicen las letras para expresar estas regularidades mediante expresiones simbólicas. En los experimentos de proporcionalidad directa ha de buscarse llegar a la representación algebraica de la variación. Intentar que en fenómenos concretos el estudiante comprenda el significado de la constante de proporcionalidad. Incluso es posible pensar en varias rectas para valores distintos de la constante y entender en el contexto de un mismo tipo de problemas el significado de esta variación. Quizá en este ciclo no convenga hacer un estudio tan juicioso de la proporcionalidad inversa como el que se ha propuesto para la directa, pero si es necesario que los alumnos tengan la oportunidad de hacer experiencias que les permitan contrastar este tipo de dependencia con la directa.

Otras experiencias ligadas a este subcampo tienen que ver con la identificación de patrones de variación en sucesiones; en este ciclo conviene continuar con este tipo de problemas en versiones un poco más complejas. Dada una sucesión de hechos, inferir cuál sigue, expresar verbalmente el patrón de variación, verificar que el patrón se cumple y construir otras sucesiones con otros elementos en los que varía otra propiedad pero que mantengan el mismo patrón, además usar registros simbólicos para expresar un elemento cualquiera.

Hacer pequeños estudios en los que se registra en tablas y se hacen gráficas de los cambios que se producen en dos magnitudes. El peso de un balde en una báscula a medida que se va llenando con uno, dos, tres objetos, o con agua. Los cambios en la altura de nivel del agua en un recipiente cilíndrico cuando se sumergen completamente uno, dos, tres, etc. objetos iguales. Así como los estudiantes se enfrentan a este tipo de experiencias en las que debe identificar regularidades, conviene que ligado al pensamiento estocástico se hagan pequeñas investigaciones en las que puedan ver que hay conjuntos de datos en los que no surgen las regularidades a simple vista, porque una no determina a la otra.

4.2.5. Pensamiento estadístico y aleatorio

El niño en el ciclo de educación básica A adquiere la capacidad de distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas, entendiendo lo aleatorio y el azar como aquello que no es posible determinar con anticipación, gracias a que él puede comprender las secuencias causales de los eventos y captar la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Establece acertadamente comparaciones cuantitativas de probabilidad entre dos eventos cuando tienen el mismo número de casos posibles, pero debido al escaso desarrollo de su pensamiento proporcional encontrará dificultades cuando cambia el número de casos posibles, por ejemplo cuando tiene que escoger y justificar si le favorece más sacar un dulce rojo de una caja oscura en la que hay 3 rojos y 7 blancos, o sacarlo de otra caja en la que hay 5 rojos y 9 blancos. De forma análoga, los alumnos de este ciclo avanzan en el significado empírico de la probabilidad.

Durante este ciclo, los educandos se interesan y tratan de buscar un sistema que les permita solucionar las situaciones de combinaciones y permutaciones, aunque en general el éxito alcanzado está basado en la búsqueda empírica y el uso de estrategias desordenadas. Por ejemplo, ante el problema de construir todas las posibles banderas de dos colores distintos, teniendo disponible cinco rollos de tela de diferentes colores, el niño tratará de enumerar empíricamente las diez posibilidades, siendo complejo para él emparejar de manera sistemática un primer color con cada uno de los otros cuatro y luego un segundo color con los tres restantes y así sucesivamente. Similar a como sucede en el ciclo anterior, las situaciones en las que el número de elementos aumenta se tornan más complejas, porque requieren de la coordinación de las dos operaciones de seriación, y correspondencia en una única operación. Contar todas las formas distintas como 10 niños se pueden colocar en una fila para entrar al salón es una situación que desborda la posibilidad de contar de forma empírica las 3.628.800 permutaciones.

Es importante tener en cuenta que el componente combinatorio no se adquiere espontáneamente, en particular las técnicas para la solución de problemas combinatorios necesitan de la instrucción paulatina, y además reconocer que es posible inducir durante el ciclo de educación básica A la apropiación de estrategias combinatorias que les permita a los estudiantes abordar con éxito situaciones de permutaciones y combinaciones con conjuntos relativamente pequeños.

Ante las situaciones de organización y representación de datos, el educando desde los primeros grados de este ciclo logra establecer y coordinar uno y dos criterios de orden cuando elabora listas, además comienza a construir tablas en las que relaciona dos conjuntos de datos de magnitudes cercanas y puede interpretar y representar frecuencias relativas mediante histogramas y diagramas de barras.

El alumno será capaz de coordinar tres criterios de organización simultáneamente apoyado en referentes concretos y logrará poco a poco establecer y explicar relaciones de dependencia entre las magnitudes que se relacionan. Establecer y representar el tipo y la cantidad de comida que se le debe dar a un grupo de mascotas de acuerdo a su edad, analizando los tres tipos de componentes nutricionales que aporta el alimento, necesita de experiencias concretas con las que los alumnos puedan darle sentido y significado a su aprendizaje.

Se recomienda utilizar las múltiples situaciones de tipo aleatorio del entorno, apoyarse en ejemplos y eventos que enriquezcan las experiencias de los niños y que estimulen la reflexión sobre los problemas y sobre los métodos y estrategias de solución. Limitar el desarrollo del *pensamiento estadístico y aleatorio* al estudio de algunos procedimientos que permiten solucionar ciertos tipos de problemas modelo o memorizar la forma de calcular medidas estadísticas, es desaprovechar la posibilidad para que el educando se apoye en referentes concretos que le permiten darle sentido y significado a su aprendizaje.

El uso de material manipulable es necesario en este ciclo, material que genera situaciones significativas y datos numéricos con los cuales se puede reflexionar sobre el azar como: el uso de bingos en los que se extraen bolas o fichas, los experimentos con dados, el lanzamiento de monedas, las ruletas, las cartas o tarjetas, el tiro al blanco y las loterías. En la estadística, los datos sobre las característica de una población como su estatura, su peso, la longitud de sus extremidades, o el rendimiento en pruebas físicas de velocidad, resistencia y fuerza, o la búsqueda de datos del entorno sobre la dieta de las mascotas, el crecimiento de la población o las condiciones climáticas a lo largo de un periodo de la temperaturas, las precipitaciones, o los resultados de los equipos favoritos en torneos deportivos escolares, nacionales o internacionales, brindan múltiples oportunidades para recoger información y realizar integración con otras disciplinas.

En la combinatoria se recomienda desarrollar aptitudes en los niños para resolver problemas simples de conteo exhaustivo de objetos, buscando la utilización de estrategias sistemáticas, mediante actividades manuales o medios gráficos. Además introducir el manejo de los árboles u otros diagramas que permitan hacer inducción de estrategias y conteo de eventos, llegando incluso a buscar que los alumnos puedan cambiar algunos datos de los problemas ya solucionados y expresar las estrategias utilizadas.

Se recomienda trabajar de manera integrada los tres componentes del pensamiento estocástico en situaciones problema, en las que se estimule y reflexione sobre la probabilidad, la combinatoria y lo estadístico. Los intereses de los niños ofrecen bastantes tópicos que requieren establecer relaciones de causa y efecto y las maneras como se puede comparar y cuantificar la probabilidad, el uso de estrategias para comenzar a ser exhaustivos y sistemáticos en el conteo de eventos y el uso de listas, tablas y gráficas de barras para describir y comparar conjuntos de datos empíricos. Permitir que los estudiantes participen en la organización de eventos en el aula de clase y fuera de ella implica prever y tomar decisiones sobre condiciones fortuitas, elaborar listas de datos y compararlas, contar formas como se pueden organizar los objetos y las actividades y diseñar informes cuantitativos sobre su gestión.

Este pensamiento posibilita hacer múltiples conexiones con los demás pensamientos matemáticos, con él se potencian los procesos de conteo, de adición, de multiplicación en el pensamiento numérico, el manejo de dependencia y variación aditiva y multiplicativa del pensamiento variacional, las propiedades de las figuras geométricas y sus movimientos. Por lo tanto se considera que no se deba trabajar de forma aislada en un periodo de tiempo separado, ni tampoco agregar una materia adicional del currículo. Para este ciclo el uso de formalismo y teoría en la mediación obstaculiza y tiende a confundir a los niños.

Durante estos grados de escolaridad es posible acompañar a los alumnos en la búsqueda de caminos sobre “preguntas de investigación”, vinculadas al campo de lo matemático, lo histórico y lo científico y lo tecnológico. Determinar por qué y cómo suceden las cosas en el mundo biológico, físico y químico implica recoger y organizar datos cuantitativos tratando de evitar los errores en la medida y sesgos en el manejo de las muestras, así como para comprender cómo son y cómo cambiarán las condiciones de vida de un grupo humano es necesario el tratamiento de los datos del pasado, del análisis comparativo con los datos del presente y de la inferencia de las consecuencias de las decisiones.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Pensamiento Matemático en el ciclo de educación básica B

Grados 7º a 9º

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

5. El campo del Pensamiento Matemático en el ciclo de educación básica B

En este capítulo se desarrollan algunas especificidades del campo en el ciclo de educación básica B. Para una mayor contextualización y comprensión de lo que aquí se plantea se recomienda estudiar los planteamientos que se formulan en los dos primeros capítulos. En primer lugar se toman uno a uno los ejes curriculares y en segundo lugar, cada uno de los subcampos propuestos para este ciclo. En cada caso se hacen recomendaciones sobre aspectos que se consideran importantes enfatizar y se ofrecen algunas ideas para el trabajo en el aula. Con esto no se pretende agotar todo lo que es posible y deseable realizar en el ciclo, pero sí ofrecer algunas orientaciones de lo que es necesario hacer. Sin embargo se advierte que estos planteamientos no se deben asumir como prescripciones curriculares, más bien se invita a los maestros y maestras para que los lean como concreciones a los planteamientos generales y se estudien en las reuniones de áreas y en los grupos locales, para construir acuerdos básicos sobre hacía dónde orientar la educación matemática en el ciclo de educación básica B.

5.1. Ejes curriculares

Tal como se definió en el capítulo primero, son tres los ejes que atraviesan la estructura curricular del campo del pensamiento matemático: razonamiento, modelación y comunicación y representación. A continuación se plantean las especificidades que adquieren estos tres ejes en el ciclo de educación básica B. Para mayor comprensión de lo que se plantea se recomienda revisar el numeral del capítulo segundo correspondiente al eje que se esté estudiando.

5.1.1. Razonamiento

Aunque, como se ha dicho, no se puede hablar con precisión de formas de razonamiento en un momento del desarrollo intelectual de un estudiante, independientemente del contenido y la situación contextual, es posible recomendar algunos aspectos en los que conviene enfatizar durante este ciclo teniendo en cuenta algunas características del razonamiento del estudiante del ciclo de educación básica B. Estas ideas son apenas iniciales, la investigación y la innovación tienen mucho que decir, por eso un trabajo posterior deberá precisar la caracterización del razonamiento del alumno de este ciclo y concretar experiencias de enseñanza adecuadas.

El mayor énfasis que se propone hacer en este ciclo consiste en que los educandos den razones de la validez de sus ideas fundamentándose en elementos teóricos previamente establecidos (definiciones, principios, leyes, propiedades). Se dijo que al estudiante del ciclo de educación básica A le resultaba difícil dar razones sobre la validez de sus ideas y que cuando se lograba ponerlo en situación de dar cuenta de se podía observar que se soportaban en la evidencia empírica (“eso es correcto porque yo lo hice así y me salió”), o en razones de autoridad (“es así porque así me lo sé”, o “porque así me lo enseñaron”), o simplemente en lugar de ofrecer una justificación se limitaban a describir el procedimiento seguido (ante requerimientos del profesor del tipo: “explique por qué”, o ante la necesidad de dar una justificación a un par respondía describiendo lo que hizo, como si entendiera que dar una razón de la validez de lo que dice y hace consiste en mostrar que lo que dice y hace es correcto). En este ciclo, cada vez con mayor insistencia se trata de ayudar al alumno a elaborar enunciaciones del tipo “ésto es válido porque de acuerdo con ___ entonces, necesariamente ____, se cumple (o no se cumple) que ___”. Es decir se trata que ante requerimientos del profesor del tipo: “explique por qué”, ofrezca razones que sustenten el por qué a nivel teórico mostrando que establece relaciones teóricas con los elementos involucrados y no se quede en dar descripciones de las acciones que realiza sino que comprenda y limite los alcances de lo que enuncia.

En este ciclo se trata de ayudarlos a construir contra argumentos sólidos para refutar las ideas que consideren falsas. Se dijo que los estudiantes del ciclo de educación básica A tienen dificultad para ofrecer contra argumentos que rebatan las ideas de los otros. Que era común que cuando tenían cierta certeza de que la idea del otro era incorrecta, se limitaban a oponérsele exponiendo la propia en la que confiaban. Se recomendó que en el ciclo de básica A, los alumnos se percatarán de la limitación de los contra argumentos del tipo “lo suyo es falso porque lo mío es verdadero”. En este ciclo conviene que los educandos tomen conciencia del hecho de que para mostrar la falsedad de una idea basta mostrar un caso en la que ésta no se cumple, mientras que la verdad de una idea no se muestra porque se verifique en uno o varios casos; que igualmente en estas situaciones hay que construir argumentos con ideas generales, en los que se explicite su validez para el universo de casos en los que se pretende que la idea sea verdadera. Recurrir a construcciones particulares (figuras, expresiones particulares o construcciones físicas) puede ser un apoyo al entendimiento, porque ilustran la idea, alimentan la intuición, pero no sustituyen la construcción de razones.

En este ciclo se debe procurar que los estudiantes logren mayor control de las cadenas de razones que producen, que analicen encadenamientos de juicios propios o de otros y valoren su validez.

Conviene orientar a los alumnos para encontrar los patrones en secuencias que incluyen dos o más variables, que recurran al lenguaje simbólico para expresar el general y a ofrecer razones apoyándose en elementos teóricos que justifiquen la necesidad lógica del patrón.

Alentar a los educandos a comprender y construir demostraciones sencillas y manejar algunos métodos de demostración (directa y por el absurdo), construyendo cadenas de inferencias y analizando la consistencia de la misma con relación a las premisas dadas y a la teoría matemática que involucra.

Ayudarlos a generar una proposición a partir de unas dadas y a que analice la consistencia de la misma con relación a esas premisas dadas y a la teoría matemática que involucra.

Invitarlos a que describan lo que dicen y hacen. Apoyándolos para que cada vez lo hagan de forma más clara y precisa. Estimulándolos para que, poco a poco, ofrezcan razones de eso que dicen y hacen. Unas veces se les pedirá que lo hagan en forma oral y otras por escrito. Ayudándoles a mejorar sus razones, buscando que tengan mayor pertinencia y fuerza argumentativa. Reforzándoles que deben analizar lo que escriben, sometiéndolos a la lectura de otros escritos, a la relectura propia, y a estudiar la validez y verdad de su razonamiento (¿El texto es suficiente o por el contrario deja elementos implícitos que es necesario clarificar? ¿Las inferencias que obtienen son correctas? ¿Las ideas de las que parten son consideradas como verdaderas?).

Ayudarles a ponerse en el punto de vista del otro. Pidiéndoles que intenten comprender lo que hacen y dicen otros y se esfuercen en dar cuenta de la validez de las ideas que ellos expresan.

Ayudarles a reflexionar sobre sus propias razones y las de otros. A encontrar los límites de estas, de acuerdo con la situación-problema que se aborde o a los acuerdos conceptuales que se están construyendo en el aula. En algunos casos conviene que el docente muestre los límites de un razonamiento, pues esto puede ayudar a algunos estudiantes a caer en la cuenta de ellos y comprender con pleno sentido el vacío de sus razones.

Invitarlos de forma permanente a problematizar, a inventar sus propias alternativas de solución, a compartirlas en pequeños grupos, a explicarlas y justificarlas.

Orientarlos para que controlen la validez de sus propias alternativas y procedimientos.

Elaborar situaciones-problema donde el alumno tenga que tomar decisiones bajo circunstancias de incertidumbre y otras, donde tenga que llegar a una conclusión a partir de inferencias.

Invitarlos. a completar cadenas de juicios que intencionalmente se presentan incompletas, para poner en evidencia sus vacíos y saltos.

5.1.2. Modelación

En el segundo capítulo a propósito de la definición de este eje se dijo que el proceso de modelación consiste en construir un objeto (material o no) y establecer una relación analógica entre ese objeto y el sistema real que se desea modelar, de tal forma que partes del objeto y sus relaciones corresponden con partes del sistema y las relaciones que se dan entre éstas. Un modelo es una imitación del sistema real. Imitar un sistema del "mundo real" mediante un modelo resulta útil porque ayuda al pensamiento a "figurarse" cómo funciona el sistema real, además el modelo se puede "manipular" y con él se pueden hacer experimentos para formular y verificar predicciones sobre el sistema modelado. "*La mente humana busca relaciones de modelación para comprender. Dos sistemas cuyos elementos son de naturaleza muy diferente pueden tener una misma estructura o estructuras muy similares. Uno de los sistemas nos puede, entonces recordar o evocar el otro*" (Vasco y otros1995). Este recurso es muy frecuente en las ciencias en general y en particular en la matemática; es más, podría decirse que la ciencia no es otra cosa que modelación. La matemática al prescindir de los contenidos particulares lo que hace es construir modelos que permiten representarnos los elementos de un sistema y la forma como se relacionan.

La capacidad de modelar se complejiza en la medida en que se hace más general, ésta posibilita al sujeto elaborar modelos que incluyan más variables o más relaciones, hacer uso de representaciones simbólicas más complejas y tener mayor control para dar cuenta de la validez del modelo y definir los limites que este tiene con relación a lo modelado.

Algunos autores formulan críticas a las prácticas de enseñanza limitadas a la resolución de problemas prototípicos de enunciado, ya que consideran que el paso de la situación problemática a la formulación de un problema involucra procesos cognitivos de gran importancia, tales como apropiación del sentido de la situación, identificación de variables que intervienen, decisiones sobre lo que interesa indagar, sobre las variables que se van a considerar e incluso el trabajo que implica la precisión de la pregunta sobre lo que se va a indagar, procesos estos que no vive el estudiante cuando los problemas ya se le entregan formulados.

Se espera que los educandos que inician este ciclo estén en condiciones de modelar muchas situaciones matemáticas, especialmente de lo numérico y la medida, mediante expresiones simbólicas numéricas que combinan las operaciones aditivas y multiplicativas; es posible que logren extender sus comprensiones hasta llegar a usar expresiones con "letras", pero en muchos casos todavía éstas no son propiamente variables, sino hacen referencia a números indeterminados (a la manera como los niños del ciclo anterior entienden las letras que aparecen en una fórmula). Conviene en este ciclo de educación básica apoyar a los educandos para que progresivamente amplíen y profundicen su comprensión de las variables, de tal forma que las expresiones matemáticas en las que se incluyan sean vistas desde el punto de vista funcional (como conjunto de valores variables) y no como la expresión de un valor singular e indeterminado, que es posible determina en cada caso particular.

Parte del proceso de modelar es el de su validación. En el ciclo de educación básica A, se hace más énfasis en que los estudiantes logren hacer modelaciones de las situaciones y aunque se realizan acciones para ver la validez de los modelos, este proceso se hace de forma muy rudimentaria, está más orientado a determinar en términos absolutos si el modelo sirve o no; en este ciclo de educación básica, conviene, ir un poco más allá, apoyando a los estudiantes para que comparen varios modelos de una situación y determinen cuál modela con mayor precisión lo modelado, es decir, cuál arroja valores más cercanos a la situación real y cuál tiene presente más variables pertinentes en el nivel de análisis que es deseable, posible y/o necesario.

La capacidad de modelación de los educandos crece en ambientes de aprendizaje en los que se los estimula a:

- Problematizar situaciones abiertas. Invitándolos a hacerse preguntas pertinentes y relevantes, a determinar qué aspectos deben tenerse en cuenta para ofrecer soluciones a las preguntas que se formulen, a reconocer bajo qué condiciones la solución ofrecida es la más razonable para la situación.
- Invitándolos a hacer modelos gráficos y físicos de una situación. En este ciclo buscando que progresivamente se manejen expresiones simbólicas que representen las relaciones entre las variables involucradas. De forma especial aprovechando los progresos del los alumnos en el subcampo del pensamiento variacional-algebraico, estudiar situaciones susceptibles de ser modeladas como variación proporcional, lineal, polinómicas y racionales sencillas.

- Invitándolos a reflexionar sobre las variaciones que tendrían las representaciones simbólicas y cartesianas cuando se modifican uno a varios datos o condiciones de la situación modelada.

5.1.3. Comunicación y representación

Los jóvenes de este nivel se encuentran en un periodo de su desarrollo lingüístico y cognitivo que les posibilita acceder a mayores niveles de abstracción, generalización y formalización de los conceptos. Si en el aula se les ofrece el apoyo adecuado es posible lograr que sus comprensiones y producciones lingüísticas lleguen a obtener mayor configuración lógica, independencia del contexto y coherencia, que logren hacer lectura inferencial y/ o crítica. En el campo de la matemática es posible que lleguen a manejar sistemas simbólicos relativamente complejos a condición de apoyarlos para que construyan significados de estos sistemas de signos en múltiples contextos, de ahí la importancia de ayudarlos a convertir estas expresiones al "lenguaje común" y a otros sistemas de representación (gráficos, tales como diagramas y cartesianos), en situaciones que les posibilite reconstruir una y otra vez los significados de los conceptos que estos sistemas de signos representan.

Se proponen aquí algunos aspectos en los que conviene enfatizar durante este ciclo teniendo en cuenta algunas características del desarrollo de los jóvenes tanto del lenguaje como de la comprensión de los conceptos matemáticos que se trabajan en este ciclo. Estos son un referente para que cada docente en su contexto de clase las profundice, amplié, complemente y precise.

Si bien los estudiantes de este ciclo poseen un pensamiento matemático desarrollado en un nivel relativamente importante, hecho que les permite acceder a la lectura de los códigos y dominio de las reglas gramaticales de la aritmética de los naturales, al manejo de algoritmos formales, a la representación en su pensamiento de las estructuras lógicas que soportan un buen número de las actividades de la aritmética y de la geometría elemental, de la medida, de la estadística y de la probabilidad, sin embargo la complejidad de los nuevos sistemas numéricos (enteros, racionales y reales) de los sistemas de algebraico-variacional, estadísticos y probabilísticos y geométricos propios de este nivel le hacen nuevas demandas cognitivas que le exigen, de la misma manera que en el ciclo de educación básica A, construir significados de los nuevos conceptos que no se derivan de la mera manipulación de las reglas sintácticas de los sistema simbólicos utilizados para representarlos. Por ejemplo, el acceso de una comprensión adecuada de los racionales no se logra por la extensión de las reglas sintácticas estudiadas con los números fraccionarios. El número racional es una entidad abstracta que si bien se representa como una fracción de dos enteros de forma semejante a como se representan los fraccionarios, expresa una relación multiplicativa entre números abstractos enteros, lejanas de las vinculaciones prácticas que sí tienen los fraccionarios (como cuando se consideran como partidores, operadores o razones).

Una manera de favorecer la comprensión de los conceptos y de los sistemas de signos en que se soportan sus representaciones consiste en posibilitar en el aula que los jóvenes aprendices se valgan de sus propias escrituras (dibujos, imágenes, iconos- diagramas, lenguaje natural) que las contrasten con ensayos de otros, para que poco a poco vayan accediendo a las abstracciones, al rigor, a la precisión y generalizaciones que les demandan los conceptos, así como a escrituras más formalizadas del lenguaje propio de las matemáticas.

Aunque en este momento ya los estudiantes pueden acceder a la comprensión de problemas de enunciación verbal escritos en diferentes formatos y en diferentes estructuras y formas de enunciación (ligado o desligado de la acción), en aquellos sistemas conceptuales en los que ya han logrado algunas consolidaciones se seguirá presentando que cuando se trata de nuevos conceptos mostrarán poca flexibilidad para comprender problemas de enunciados que se distancian de las formulaciones por ellos conocidas, por eso en este ciclo conviene que los alumnos se enfrenten a problemas con formulaciones lingüísticas variadas, formales y no formales.

En relación con las conversaciones entre los jóvenes aunque en su desarrollo lingüístico y cognitivo están en capacidad de descentrarse y ponerse en la perspectiva del otro, no existe la tradición escolar de las conversaciones argumentadas o de generar comunidades de aprendizaje en las que se construye y valida el conocimiento conjuntamente. El maestro puede ayudar al educando de este ciclo a enfrentar el conflicto cognitivo como posibilidad de descentrarse, entender la perspectiva del otro y coordinar puntos de vista, establecer relaciones de cooperación basadas en la reciprocidad, en las que el joven supere las conversaciones monologas o acumulativas y pase a aquellas en las que priman la critica, la argumentación, la deliberación, la explicitación de sus razonamientos y la toma de decisiones colectivas.

Finalmente los jóvenes en esta edad ya se han hecho a la pragmática del lenguaje, se asumen como sujetos del lenguaje. Es decir frente a los mensajes de la interacción producen o asignan significados de acuerdo a los contextos comunicativos, reconocen finalidades e intenciones, identifican modos de leer y escribir; sin embargo al hacerse a las reglas propias del uso del lenguaje y del discurso en la escuela, la mayoría de las veces actúan para dar respuesta a las demandas escolares (como sacar buena nota o responder para cumplir las expectativas de los docentes) más que a la comprensión genuina de los diferentes sistemas de conceptos. En ese sentido el contexto escolar deja su huella en las posibilidades de abordar o no la conciencia comunicativa, darse cuenta qué el lenguaje comunica, que es una herramienta para pensar y para relacionarse con otros.

La capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas se promueve en los estudiantes:

- Al introducir en el aula diversas situaciones comunicativas y múltiples sistemas de representación en las que el lenguaje se utiliza para poner en relación a los sujetos con el mundo físico, con los demás, con las intenciones, sentimientos y deseos propios y ajenos. La práctica comunicativa del aula ha de tener un sentido que lleve a los aprendices a construir su "conciencia lingüística", es decir, de manera implícita y/ o explicita, ya sea mediante el uso o la reflexión sobre el lenguaje y los procesos comunicativos que allí ocurren.
- Cuando el docente utilice procesos metalingüísticos para que tanto alumnos como maestros reflexionen sobre su propio lenguaje y discurso en el aula y los efectos que tienen en el aprendizaje de los estudiantes, su estructura, sus contenidos, sus funciones, y las estrategias lingüísticas más frecuentemente usadas (preguntas, silencios, pistas, claves).

- Al ayudar al estudiante a hacerse a la pragmática del lenguaje, explicitando las intenciones comunicativas y las reglas propias del lenguaje del aula como: cuándo preguntar, la importancia de escuchar y respetar turnos a la hora de participar, el manejo de las instrucciones y la relación con la acción, la diferenciación del lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas (con sus propias palabras, vocabulario, símbolos y signos), el sentido de la escritura para registrar, llevar cuentas y comunicar.
- Al introducir en el aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos diversas formas de registro y representación y la necesidad de hacer conversiones de un sistema de representación a otro. El paso de representaciones basadas en el lenguaje común a representaciones esquemáticas y más resumidas (representaciones "simbólicas" a mitad de camino), apoyadas en diagramas, dibujos o gráficas y de estas a las cada vez más simbólicas, les ayuda a ir complejizando sus construcciones. El uso de diferentes sistemas de representación para expresar la misma idea (la mitad, un medio, ½, 0,5; o representar una situación particular de proporcionalidad directa como variación entre dos variables, representándolos en forma tabular, gráfica o analítica, buscando con esto el paso de lo particular a lo general) ayudándoles a hacer las conversiones necesarias, amplía el significado de los conceptos.
- Al invitar a los alumnos a participar, discutir y colaborar en la construcción y negociación de un conocimiento compartido, ya que se reconoce que distintas maneras de presentar la información pueden generar diversas interpretaciones, y la conversación es uno de los recursos para apoyar esta construcción. Conversaciones en las que aparezca la crítica, donde haya lugar para el cuestionamiento, el debate y la justificación, donde se haga visible el razonamiento donde se establecen acuerdos y se toman decisiones conjuntamente para construir nuevas elaboraciones más consistentes. Esto es posible si el docente asume un estilo de comunicación no autoritario, ni unidireccional basado en el respeto, la tolerancia, el reconocimiento y valoración de las diferentes perspectivas.
- Al reconocer que el cuerpo comunica. Con las posturas corporales, los gestos, el movimiento de las manos, las miradas, los silencios, los matices y entonación de la voz, el maestro y los estudiantes comunican ideas, sentimientos, actitudes y valoraciones. Favoreciendo la expresión de las emociones relacionadas con la matemática y su aprendizaje: ansiedad, miedo, inseguridad, placer y satisfacción al descubrir el "ajá", al disfrutar y contemplar la estética, lo bello de un razonamiento bien hecho.
- Retomar los principios de cantidad, calidad, relación, modalidad que plantea el sociolingüista Grice como fundamentales para la cooperación en la comunicación y aplicar algunas reglas lingüísticas básicas para la producción del discurso oral (que en la academia cada vez ha de acercarse más al escrito) y del discurso escrito: claridad, precisión, coherencia, cohesión. Relacionar estas reglas con las reglas del discurso formalizado de las matemáticas (brevedad, precisión, disposición espacial).
- En fin haciendo del aula un espacio comunicativo en el que se privilegia la

diversidad textual para crear, expresar, representar y validar ideas matemáticas: textos narrativos, instruccionales, informativos, explicativos, descriptivos, diálogos, pero sobre todo argumentativos; se promueven también diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica así como el diseño de situaciones para que los alumnos se manifiesten a través de un lenguaje cada vez menos ligado a las situaciones concretas y a las experiencias cotidianas; un lenguaje con poder generalizador (independencia del contexto) más abstracto y formalizado que es el propio de las matemáticas.

5.2. Subcampos del Pensamiento Matemático

Así como se hizo con los ejes, en estos numerales se tomará cada subcampo y se recomendarán unos énfasis e ideas para el aula en este ciclo.

5.2.1. Pensamiento numérico

Como se ha dicho este subcampo hace referencia a esa parte del pensamiento matemático ligado a los sistemas numéricos. Al interior de estos sistemas se distinguen los objetos (el tipo de número que se trabaja en cada caso), las relaciones que se establecen y las operaciones que se pueden ejecutar entre ellos.

En el primer capítulo se señaló que la construcción de la ideas de cada uno de los tipos de números que se estudian a lo largo del preescolar y la educación básica son procesos en que los estudiantes lentamente construyen ideas cada vez más elaboradas (por lo tanto más abstractas) de los números, como fruto de las relaciones que establecen y las operaciones que ejecutan con esos objetos que sin ser todavía matemáticos les sirven para enfrentar las situaciones concretas que enfrentan y que los llevarán a la idea de un determinado tipo de número. También se dijo que la función de la escuela es la de apoyar a los alumnos para que logren complejizar esta ideas iniciales, alcanzando ideas cada vez más abstractas, desligadas de la situaciones concretas que le dieron origen. Pero ese camino de distanciamiento de lo concreto no es fácil, más bien está lleno de obstáculos en los que paradójicamente los significados, las vinculaciones con los hechos, se vuelven obstáculos necesarios de superar para llegar a estudiar los números como objetos propiamente matemáticos.

Los progresos de los estudiantes de este ciclo en este subcampo están orientados hacia las construcciones de los números enteros, los racionales y los reales. Generalmente en la escuela se asume que lo que hay que hacer en este ciclo es ampliar el conocimiento del sistema de los números naturales y de los números fraccionarios a estos nuevos sistemas numéricos. Se considera que para construir los enteros basta simplemente ampliar los números naturales para que ecuaciones de la forma $x + a = b$, tengan solución, aún en los casos en que $X > b$. De manera que se piensa que basta con introducir la notación de unos nuevos números y enseñar las reglas para calcular las operaciones con ellos. Algo semejante ocurre con los números racionales, en su enseñanza se piensa que al conocimiento que tienen los estudiantes de los números fraccionarios lo único que falta es adicionar la representación de los negativos – aquí poco se agrega, pues en ese momento los estudiantes ya tienen los enteros-, extender los algoritmos de las operaciones con fraccionaros a los racionales y estudiar algo de las propiedades de estas operaciones.

Con los reales se piensa que todo lo que hay que hacer es introducir los números irracionales y una vez hecho ésto, basta construir este nuevo conjunto numérico como la unión de los racionales y las irracionales.

Los resultados de evaluaciones externas nacionales e internacionales, muestran, una y otra vez, las elementales comprensiones que logran los estudiantes de estos conjuntos numéricos. Parte de estos resultados pueden explicarse por la forma de enseñanza de los números arriba descrita. Quizá algunos estudiantes logren ejecutar correctamente operaciones con enteros, con racionales y reales, y resolver algunos problemas prototípicos que los involucren; pero tienen grandes dificultades para entender el significado de los enteros en situaciones en las que han utilizado para modelarlas. No es muy claro que el estudiante logre construir la idea de inverso (aditivo y multiplicativo), por el simple hecho de saber cosas como que la suma de un número más su opuesto es cero, o que la multiplicación de un número por su inverso (multiplicativo) da como resultado uno. La convicción de muchos estudiantes de que la desigualdad –a < 0, siempre es verdadera, por el hecho de estar "a" precedida por el signo "-", en parte, muestra la escasa elaboración de inverso aditivo.

Como se dijo a propósito del ciclo A, la posibilidad de la comprensión y la capacidad de operar con los números negativos y positivos se soporta en un pensamiento capaz de comprender plenamente la composición de dos relaciones y dos operadores aditivos naturales (Ej. A un "m" cualquiera se le suma "a" y al resultado obtenido se le resta "b", el resultado final es igual al que se obtiene si al número "m" se le suma "a – b", en caso de ser a > b, o se le resta "b-a", en caso de a<b.). Pero no es simplemente poder hacer estas composiciones como fruto de haber aprendido unas reglas, sino de comprenderlas de forma genuina. De manera que una preocupación inicial en este ciclo ha de ser la de asegurarse que los estudiantes hayan logrado esta conquista y sobre esa base, apoyarlos para que realicen modelaciones con números positivos y negativos. Ellos no construirán significados de lo positivo y negativo, como entidades abstractas, por el aprendizaje de reglas sintácticas, sino por la relación entre significados de estos números en diferentes contextos.

Dada la gran complejidad que representa para el pensamiento de los estudiantes de educación básica la compresión de los enteros, quizá sea más adecuado entender que una gran conquista, en este nivel, consiste en acceder a la comprensión de lo que se reconoce como "números relativos" (números con signos). Lograr que los estudiantes comprendan los significados de lo positivo y lo negativo como "ubicadores" (por ejemplo, está en la posición -24) y como "transformadores" (quitó 23), y sobre todo, que puedan operar coordinando estos dos significados es una conquista sólida para otras elaboraciones básicas y necesarias con los números relativos.

Un asunto que merece ser documentado y debatido por los profesores tiene que ver con la notación. El uso indiferenciado del singo "-", para representar la operación resta, lo negativo y lo opuesto, genera un dificultad adicional en los estudiantes, pues no permite distinciones y conlleva a errores conceptual graves. El caso típico de situaciones como "a - b(c – a)", en el que los signos "-" que anteceden a "b" y a "a", aunque se reconoce que representan la operación resta, se dice "menos por menos": La ley de los signos, se aplica entre lo positivo y lo negativo, existe entre números, no es aplicable entre operaciones, por más que para representar por escrito las operaciones entre números se usen signos.

Con relación a la construcción de los números racionales se puede decir algo semejante a los enteros. Puede que desde el punto de vista matemático sea correcto considerar a los fraccionarios como los racionales positivos, pero esto no quiera decir que desde el punto de vista cognitivo se esté hablando de las mismas construcciones. Los primeros son entidades abstractas propias de la matemática, no están referidas a ningún contexto, los segundos están ligados a situaciones, es allí donde el estudiante las llena de significado y podría decirse que para ser pensadas el estudiante las liga a representaciones más o menos concreta, como áreas, como longitud, etc. Si esto es así, se vé claro que el paso de los fraccionarios a los racionales, no es simplemente agregar unos números negativos, más bien es una reconstrucción. Ahora bien, la calidad de tal reconstrucción estará determinada por la calidad de aquello que se reconstruye. Es claro que si las comprensiones de los estudiantes sobre los fraccionarios no van allá de algoritmos, los significados que logran los estudiantes de las racionales terminan siendo deficientes.

Los racionales introducen una novedad cognitiva importante: la idea de densidad numérica. Esta idea es parte de las conquistas de los estudiantes en este ciclo y es mucho más que manejar técnicas para encontrar un racional entre dos racionales dados, es ayudar a avanzar el pensamiento de los estudiantes de lo discreto a lo continuo, idea ésta última que es fundamental para acceder a una comprensión de los números reales. Estas ideas encierran gran dificultad para los estudiantes debido a que requieren el manejo de lo infinito, construcción compleja para un pensamiento aún ligado a lo concreto.

5.2.2. Pensamiento métrico

Los estudiantes que inician este ciclo poseen comprensiones más o menos consolidadas de varias magnitudes, conocen sus sistemas de medidas y hacen uso de diferentes formas de representarlas (fraccionarias y decimales), también hacen conversiones y cálculos de operaciones entre ellas.

Al iniciar este ciclo conviene apoyar a los estudiantes para que consoliden las construcciones que ellos han alcanzado en magnitudes como amplitud angular, el cálculo del área mediante fórmulas y especialmente la noción de volumen y su cálculo, ya que esta última apenas se inició en el ciclo básica A. Con esta magnitud se recomienda recorrer un camino semejante al sugerido para el área en el ciclo anterior (ver este subcampo en el capítulo anterior).

Uno de los progresos de los alumnos en este ciclo en este subcampo consiste en lograr un mayor manejo de los sistemas de unidades de medida, sean estos decimales o no. Este progreso está marcado no sólo porque el estudiante tenga conocimiento de nuevas unidades y sus equivalencias con otras conocidas, sino ante todo porque gana experiencias que le permitan apreciar el tamaño de las nuevas unidades, determinar la unidad más adecuada para tomar una medida, tener criterios para que de acuerdo con el contexto determine el grado de precisión conveniente, haga estimaciones, utilice y construya instrumentos. Conviene tener presente que los procesos de conversión de una unidad no deben reducirse a técnicas esterotipadas, sino que deben sustentarse en un adecuado desarrollo del pensamiento proporcional de los estudiantes.[53] También es importante que los alumnos logren el manejo de diferentes formas de representación de las cantidades (fraccionarias, decimales, con coma o punto y notación científica).

53 Los estudiantes muestran grandes dificultades para hacer conversiones de sistemas decimales a no decimales, por ejemplo tienen dificultad para establecer la equivalencia entre los valores como 1 hora y 12 minutos y 1,2 horas, muchos estudiantes consideran correcto interpretar este último número como 1 hora 20 minutos.

Otro progreso en este ciclo está vinculado con la compresión de magnitudes secundarias como densidad, peso específico, rapidez, etc., su medida y sus sistemas de unidades. La comprensión de estas magnitudes se hace posible por los progresos de los estudiantes en el pensamiento proporcional. Si ellas se presentan de forma dinámica ayudan a consolidar el pensamiento variacional, de ahí la importancia de plantearse experimentos imaginarios en los que se estudie la variación de la densidad, el peso específico, etc. cuando cambia una de las dos magnitudes que la define, mientras permanece constante la otra. De igual forma en este ciclo los alumnos deben estudiar magnitudes ligadas al medio social, de tal forma que estén en capacidad de comprender recibos de servicios e información que circula en las noticias.

En este ciclo los educandos tienen que avanzar en la compresión de la precisión y exactitud de una medida. Estimar el error cometido en una medida y los que arrojan los cálculos obtenidos con ellos. La elaboración de instrumentos sigue siendo fundamental en este ciclo, pero ahora se hace posible dar cuenta de la precisión del instrumento.

Finalmente, en este ciclo conviene que los estudiantes se enfrenten a experiencias sencillas de la medida de magnitudes intensivas,[54] en las que tengan la posibilidad de comprender métodos propios del pensamiento estadístico y aleatorio. Con este propósito se pueden invitar a los educandos a hacer estudios exploratorios para construir escalas que le permitan medir grados de intensidad de un hecho más o menos subjetivo; por ejemplo, grados de compromiso de los estudiantes con relación a un propósito expresado en términos de valoraciones y acciones de los estudiantes.

54 Aquellas que no son divisibles ni aditivas, a + a = a, por ejemplo el color rojizo de un frasco de pintura roja se mantiene si en una misma vasija se mezclan dos frascos de esa misma pintura (Ver numeral (2.5.2).

5.2.3. Pensamiento espacial

Los progresos de los estudiantes en el ciclo de educación básica B con relación a sistemas de localización están marcados porque logran coordinar sistemas de referencia distintos, ya que manejan sistemas de referencia universales, como el sistema de posición geográfica (el de los puntos cardinales). Se trata en este ciclo, por una parte, de avanzar hacia el manejo del sistema de posicionamiento global y por otro lado, con los progresos en geometría, llegar a construir sistemas axiales de dos y tres dimensiones (coordenadas cartesianas y las coordenadas polares) con los cuales puedan representar objetos matemáticos y trasformaciones de estos. Gálvez (2001)[55] señala que los progresos de la abstracción en la localización están marcados porque cada vez se necesitan menos referentes para saber en dónde están y hacia dónde se dirigen. Con los progresos de los alumnos en este ciclo en la compresión de la proporcionalidad y de los fraccionarios, especialmente con el significado de razón, es posible apoyarlos para que consoliden un dominio de la escala. Esto los capacita para realizar e interpretar representaciones con el control de una métrica, que podrán aplicar al espacio físico, a los objetos y a las figuras. Son importantes las experiencias en las que los educandos elaboran e interpretan representaciones gráficas del espacio físico (croquis, planos, mapas) y hacen prototipos de objetos a escalas.

55 Referencia de Gálvez.

Los estudiantes que inician este ciclo reconocen los componentes de una figura plana (elementos como número y longitud de sus lados, número de vértices, inclinación relativa de sus lados con mayor control por la idea de ángulo), y establecen relaciones sencillas entre estos elementos en figuras planas. Además identifican y operan con relaciones de dependencia entre estos elementos como por ejemplo variaciones en la longitudes de los lados pueden producir variaciones en sus direcciones relativas; de igual forma pueden logren identificar en figuras conocidas las condiciones necesarias y suficientes que las determinan unívocamente y establecen jerarquías inclusivas entre las figuras (a la manera de mapas conceptuales, esquemas o diagramas de Venn). También logran identificar los elementos de la superficie que limita un sólido, haciendo desarrollos planos de objetos tridimensionales, identificando sus vistas, anticipando los resultados de transformaciones y manejando la perspectiva. Conviene en este ciclo ampliar estas posibilidades a figuras planas y a sólidos más complejos.

Un progreso fundamental que se considera necesario consolidar consiste en "algebrizar" propiedades de y entre figuras (inscripción y circunscripción), aprovechando el manejo de algunos teoremas básicos. Este punto es una oportunidad especial para conectar dos pensamientos, el espacial y el algebraico-variacional. Igualmente, permite mostrar a los estudiantes la potencia que tiene el tratamiento algebraico de algunas propiedades de las figuras para inferir nuevas relaciones. Pero es necesario tener presente la importancia de ayudar a entender el significado de las nuevas relaciones que se obtienen por las manipulaciones algebraicas; para ello conviene que dicha expresión sea representada en el lenguaje verbal. También hay que favorecer representaciones dinámicas en el alumno para lo cual es útil tratar la nueva relación como una variación, representándola en diferentes registros (tabulación y gráfica cartesiana) y construyendo gráficos o artefactos que permitan visualizar, con los ojos y el pensamiento, la variación y a la vez la identificación de lo que permanece constante. El uso de software es un soporte fundamental para la intuición. En síntesis, podría decirse que al encontrar una nueva relación se requiere ayudar a los estudiantes a fortalecer la intuición de esta, de tal forma que evidencie su validez; es decir, que logre entender lo razonable del resultado. Experiencias de generación de sólidos por la rotación de figuras planas y cortes transversales de sólidos, ayudan a los educandos a ampliar sus intuiciones sobre éstos.

En el ciclo de educación básica B los estudiantes han avanzado en su capacidad para elaborar conjeturas sobre relaciones de los elementos de una o varias figuras o sobre transformaciones de estas, cuando ellas exigen coordinar pocos elementos. Pero tienen dificultad al elaborar construcciones geométricas o argumentos para justificarlas o negarlas. Cuando lo logran sus argumentos son de carácter empírico. En este ciclo conviene apoyar a los alumnos para que ganen mayor capacidad de hacer construcciones geométricas, a partir de las cuales puedan formular conjeturas más complejas y desarrollar procesos sencillos, como prueba de estas. Para ello es necesario promover en la enseñanza situaciones de investigación, en las que los estudiantes se apropien de las preguntas que se les invita resolver; que diseñen los procedimientos que los aproximen a las respuestas; que los ejecuten y obtengan las conclusiones; que las comuniquen y construyan razonamientos para validar las conclusiones obtenidas. Conviene ayudarlos a hacer construcciones gráficas o materiales en las que puedan apoyar sus intuiciones. El descubrimiento de nuevas relaciones generalmente no surge por la vía del pensamiento deductivo. El camino del descubrimiento es más el de ensayo y error. Sólo después de tener el resultado de una nueva relación, la deducción hace presencia para validarlo.

En este ciclo corresponde colaborarles para que elaboren modelos geométricos que les permita representar y resolver problemas de otros subcampos del Pensamiento Matemático y de otros campos del conocimiento. El empleo de instrumentos para construir curvas y superficies es necesario porque permite visualizar propiedades y transformaciones de los elementos involucrados en las figuras, como el acto de generar diseños propios.

5.2.4. Pensamiento algebraico-variacional

Se dijo que en el Ciclo A se trata de estudiar a nivel cualitativo fenómenos de dependencia entre dos variables en los que los niños tengan la posibilidad de hacer diferentes representaciones, de identificar y expresar en diferentes registros regularidades de la variación de cada una de las variables y de su dependencia. En general no se trata de llegar a expresiones verbales o simbólicas para expresar la relación de dependencia.

Se recomendó como énfasis del ciclo A la proporcionalidad directa e inversa. Pero se insistió en que este pensamiento no se logra por el simple aprendizaje de la regla de tres, o de cualquier otra técnica, sino por los intentos de identificar, en diferentes contextos, de identificar estos patrones de variación, de compararlos con otras formas de variación, apoyándose para esto en diferentes formas de registro.

En este ciclo se recomienda extender el estudio a otros modelos de variación: el lineal y algunos casos simples de variaciones polinomial y racionales. Igual que lo recomendado para el caso de la proporcionalidad, se sugiere que estos modelos se estudien al interior de experiencias que exijan modelar las formas de variación entre dos variables, que estas experiencias se hagan en diferentes contextos y que se utilicen diferentes formas de representación. Más que perseguir el conocimiento exhaustivo de diferentes modelos de variación y de hacer tratamientos completos de las representaciones algebraicas de estos modelos, el énfasis ha de hacerse en las compresiones de los diferentes registros, del uso de algunas propiedades de estos registros para interpretar propiedades estructurales de las formas de variación.

Se dijo que el registro algebraico es el sistema de signos más importante para expresar la variación y que su importancia radica en que es sucinto y es una forma potente de comunicar ideas complejas y abstractas; además, por la posibilidad de hacer transformaciones de una expresión a otra equivalente siguiendo las reglas sintácticas del sistema, se pueden inferir relaciones nuevas, a partir de unas ya conocidas. Se propuso ligar el estudio del sistema de representación algebraico a la variación, en todos los niveles de la educación básica, ya que es la variación la que permite apreciar que las representaciones algebraicas son formas de representación simbólica de relaciones generales. Poco a poco conviene incrementar la capacidad de hacer manipulaciones operatorias de expresiones algebraicas sujetándolas a la variación y al estudio de diferentes problemas en los que el estudiante se apropie de la función de herramienta que ellas tienen para interpretar hechos[56]. En educación básica es más favorable orientar el estudio de las representación algebraicas ligadas a la interpretación de variaciones y la búsqueda de nuevas relaciones posibles, que como estudio formal y abstracto. Muchos estudios muestran las grandes dificultades que los estudiantes tienen para pasar las transformaciones que hacen sobre las expresiones algebraicas en las reglas que rigen la sintaxis de un sistema. Generalmente cuando logran cierta habilidad para ejecutarla lo hacen por la vía del entrenamiento.

También se ha dicho que una representación simbólica no se constituye en algebraica por el simple hecho de incluir letras que representan números que se combinan con las operaciones posibles entre los números; si el estudiante no es capaz de captar las relaciones generales que ellas expresan es un simple simbolismo. En gran medida esto pueda explicar la gran dificultad que ellos tienen, incluso en educación superior, para usarlas como herramienta en el estudio de relaciones entre las magnitudes que intervienen en un hecho.

Se ha insistido en la necesidad de ayudar a los estudiantes a representarse mentalmente las expresiones algebraicas como forma de variación, pero es necesario ir más allá, en ellas también hay que reconocer la representación de la estructura de una variación. La forma de variación expresada por $Y = 3X$ es la representación sintética de un modelo de variación entre las dos variables, por lo tanto también tiene que surgir en la mente de los estudiantes que esta expresión muestra la estructura de la variación. Esta representación mental ya no está ligada a imaginarse los cambios particulares, ya es elevada a un ente abstracto que tiene significado por sí mismo.

5.2.5 Pensamiento estadístico y aleatorio

El joven del ciclo de educación básica B distingue entre el azar y lo deducible, gracias al progreso en los otros subcampos del pensamiento matemático y a la complejización de los esquemas lógicos; aun cuando todavía se le dificulta componer la interferencia de las causas de un fenómeno aleatorio con la independencia de las mismas. En algunos casos podrá identificar e independizar algunas causas de las que dependen las características físicas heredadas por una persona pero se le dificultará comprender cómo ellas interfieren entre sí, en otros casos podrá enunciar la forma como una factor climático interfiere con otro en la ocurrencia del clima de una región pero se le dificultará independizarlos. En el establecimiento de la frecuencia relativa de los fenómenos aleatorios mejora como resultado de las experiencias acumuladas, particularmente en los casos en los que las predicciones tienen un efecto práctico. Y en cuanto a la estimación de la probabilidad pueden establecer comparaciones entre la probabilidad de dos eventos comenzando a utilizar estrategias multiplicativas. Cuando compara la probabilidad de sacar una bola roja de una caja en donde hay bolas rojas y negras en razón de 2 a 3, con sacarla de otra caja en la que la razón es de 4 a 5, comenzará a buscar explicaciones de tipo proporcional.

En lo estadístico, en la organización y representación de datos el joven de ciclo básica B logra interpretar y elaborar tablas en las que se coordinan dos criterios en situaciones menos cotidianas de las que trabajaba en los ciclos anteriores. Usa las frecuencias relativas

56 Aquí los recursos computacionales son de vital importancia para que los estudiantes visualicen el dinamismo de estas representaciones.

gracias al manejo de las proporciones y los porcentajes, iniciando con esto la posibilidad de establecer comparaciones e inferencias entre conjuntos de datos, lo cual le permite también interpretar, construir y comparar diversas representaciones gráficas cartesianas y no cartesianas de frecuencias relativas, acumuladas y porcentuales. Comienza a establecer relaciones de dependencia entre los datos representados utilizando expresiones cercanas al lenguaje cotidiano, no necesariamente algebraicas. En el manejo de la distribución el joven se acerca de manera paulatina a la comprensión de la ley de los grandes números de manera intuitiva, estableciendo, por ejemplo, que en el caso de lanzar cien veces una moneda se obtendrá un número de caras cercano a la mitad, cercanía que se va a mejorar en el caso en que se realicen mil lanzamientos. Específicamente en el caso de la distribución normal, el joven de estos grados se caracteriza por un principio de distribución de conjunto generalizable y reconocible, previendo en situaciones concretas la equivalencia entre las partes simétricas correspondientes a la dispersión. Cuando tiene que distribuir sus apuestas sobre el número que saldrá en un lanzamiento de dos dados, puede llegar a comprender mediante su reflexión que una estrategia adecuada para ganar es distribuir sus apuestas dando una mayor cantidad al número 7, un poco menos al 6 y al 8, y así ir disminuyendo hasta colocar un mínimo de apuestas al 2 y al 12.

En la combinatoria, en el manejo de combinaciones que consiste simplemente en formar todas las posibles asociaciones, el joven de este ciclo logra descubrir un sistema de formación de parejas que le permite enumerar las asociaciones sin que ninguna quede olvidada, coordinando la seriación y la correspondencia. En el manejo de las permutaciones, que implican una variación según un sistema de referencia móvil y reversible, utiliza métodos parciales dificultándosele el descubrimiento de las leyes de formación de las permutaciones. En las variaciones, vistas como la síntesis de las operaciones de combinación y permutación, se observa un comienzo de sistematización de las operaciones y de comprensión del azar, pero sin generalización a números grandes.

Como se ha sugerido en los anteriores ciclos, se recomienda utilizar múltiples situaciones del entorno que enriquezcan las experiencias de los jóvenes y que estimulen la reflexión sobre la toma de decisiones, el planteamiento y la solución de problemas, utilizando métodos y estrategias de tipo estadístico, combinatorio y probabilístico. Restringir el aprendizaje de la estadística a memorizar algunas fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media, la mediana, la varianza y la desviación estándar, o limitar el aprendizaje de la combinatoria al estudio de algunos modelos de solución de problemas prototipo en los que se apliquen fórmulas de permutaciones, combinaciones y variaciones, o reducir la probabilidad a la aplicación de fórmulas de probabilidad es fraccionar el pensamiento estocástico en tres tipos de contenidos desarticulados y dificultar la estructuración del pensamiento del joven de este ciclo.

El uso de materiales que permitan dar sentido y significado al aprendizaje, tales como los datos estadísticos que ofrecen los medios de comunicación, los censos, las encuestas, los datos de los eventos deportivos, las situaciones combinatorias estudiadas en la genética, en el análisis de las rifas y las loterías, y en general el estudio de problemas de la matemática discreta, facilitan la comprensión de métodos y procedimientos para la toma de decisiones lo más razonables posibles.

La idea de *muestra* trabajada en situaciones de recolección de datos, manejo del error en la medición y comprobación de hipótesis introduce al estudiante en la inferencia y establece un puente entre la estadística y la probabilidad. Partir de situaciones en las cuales los jóvenes formulen hipótesis de trabajo que se validen con el tratamiento de muestras y de las cuales se infieran regularidades, permite reconstruir el conocimiento matemático en el aula (hacer matemáticas y no trasmitir definiciones) y ayuda a comprender que la ciencia y los juicios sobre el mundo o las personas están basados en el muestreo y se adquieren a partir de las experiencias empíricas.

La inducción matemática implícita en el componente combinatorio permite trabajar la matemática desde la reinvención comenzando con patrones numéricos y posibilitando a los jóvenes hacer conjeturas sobre relaciones generales, experimentando y tratando de encontrar buenas definiciones y pruebas convincentes, y finalmente usando la inducción matemática, primero intuitivamente, después intencionalmente, y eventualmente de una manera más o menos formalizada.

Es importante fortalecer la recursión en este ciclo, como método de la combinatoria para resolver algunos problemas; la recursión consiste en reducir la solución del problema a obtener una versión más sencilla, simplificándolo a una parte de él, que tiene las mismas características del original y luego expresar el proceso empleado en forma reiterada. Encontrar una forma para calcular las maneras distintas como se pueden ordenar 10 elementos distintos, se puede reducir a encontrar la forma para 3 elementos, y luego expresar este proceso mediante la expresión 3x2x1 y aplicarlo de manera reiterada al caso de los diez elementos.

Las representaciones y modelos generativos permiten facilitar y enriquecer el pensamiento combinatorio (representaciones enactivas, icónicas y simbólicas), en particular el uso de los diagramas de árbol permite sugerir e inculcar la extensión sin límite a cualquier número de elementos, como ocurre en la inducción y la adaptación a nuevos problemas derivados del primitivo, que es característica del razonamiento recursivo.

SERIE
Cuadernos de Currículo

ALCALDIA MAYOR
DE BOGOTA D.C.
Secretaría
Educación

Bibliografía

Bogotá: una Gran Escuela

Bogotá sin indiferencia

Herramientas bibliográficas

Aspectos didácticos generales de la educación matemática

Bishop, A. (1988). "Aproximación sociocultural a la educación matemática". Universidad del Valle. Cali.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñando.* Aique. Argentina.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Dickson, L.; Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El Aprendizaje de las Matemáticas*. Labor S. A. Barcelona.

García, G. (2003). "Currículo y Evaluación en Matemáticas. Un Estudio en Tres Décadas de Cambio en la Educación Básica". Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Rico, L. (1997). "Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria". Síntesis. Madrid.

Comunicación y representación

Cazden, B. (1991). *El discurso en el Aula. El Lenguaje de la Enseñanza y del Aprendizaje*. Paidos. Barcelona.

Duval, R. (1999). "Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo". Peter Lang-Universidad del Valle. Cali. (Original francés).

Duval, R. (2004). "Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales". (2a. ed.). Peter Lang-Universidad del Valle. Cali. (Original francés publicado en 1995).

Escandell, V. (1993). *Introducción a la Pragmática*. Anthropos. Madrid.

Maza, C. (1995). *Aritmética y Representación. De la Comprensión del Texto al uso de Materiales*. Paidos. Barcelona.

Mercer, N. (1997). *La Construcción Guiada del Conocimiento: El Habla de Profesores y Alumnos*. Paidos. Barcelona.

Muñiz, V. (1989). *Introducción a la filosofía del Lenguaje*. Anthropos. Barcelona.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Morata. Madrid.

Rogoff, B.(1993). Aprendices del Pensamiento: El desarrollo cognitivo en el contexto social. Paidos. Barcelona.

Silvestre, A.; Blanck, G. (1993). En: *Bajtin y Vygotski: La Organización semiótica de la conciencia*. Anthropos. Barcelona.

Modelación

Duarte, V. (1997). "Modelacao computacional em ciencias e matemática". Revista Informática Educativa de Universidad de los Andes - Lidie Colombia Vol.10 N°2, pp. 171-182.

Maki, D y Thompson, M (1973). *Mathematical Models and Applications.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Vasco; C. (2003) "El Pensamiento Variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. MEN. Bogotá. Pp. 68 – 77.

Razonamiento

Balacheff, N. (2000). "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas". Una Empresa Docente. Bogotá.

Calderon, D. y León, O. (1996). "La argumentación en matemática en el aula: Una oportunidad para la diversidad". Serie temas de educación Nº 2. Universidad Externado de Colombia. Bogotá.

Duval, R. (2004). "Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales". (2a. ed.). Peter Lang-Universidad del Valle. Cali. (Original francés publicado en 1995). Tecne, Episteme y Didaxis. (Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología). No 3. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Gardner, H. (1997). *Estructuras de la Mente: La Teoría de las Inteligencias Múltiples*. Fondo de Cultura Económica. Santa Fe de Bogotá.

Apropiación y aplicaciones tecnológicas

Duarte, T. (1997). *Modelación y Computación en Ciencias y Matemáticas.* Revista de Informática Educativa, vol. 10, No. 2. Pp. 171 – 182.

Moreno, L. (2002). "Evolución y Tecnología". En: Memorias Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Bogotá: MEN, Enlace Editores Ltda. Pp. 67 – 80.

Moreno, L (2002). "Instrumentos Matemáticos Computacionales". Seminario Nacional de Formación de Docentes, Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie Memorias, Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores, Bogotá. Pp. 82- 86.

Romero, J. y Bonilla, M. (2003) "La calculadora como Re-Diseñadora de la Finalidad del Trabajo del Profesor". En: Ministerio de Educación Nacional (2003) Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Enlace Editores Ltda. Bogotá. Págs. 7-15

Establecimiento conexiones

Bishop, A. (1988). *Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una Perspectiva Cultural.* Paidos. Barcelona.

Ortega, T. (1949). *Conexiones Matemáticas. Motivación del Alumnado y Competencia Matemática*. Biblioteca de uno. Barcelona.

Resolución de problemas

Charnay, R. (1995). *Aprender (por medio de) la Resolución de problemas*. En: Parra, C e Saiz.I (comps.): Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Paidós. 2da reimpresión. México D.F.

D´Amore, B. (1997). "Problemas: Pedagogía y Psicología de la Matemática en la Actividad de Resolución de Problemas". Síntesis. Madrid.

Kilpatrick, J. (1995). *Errores y Dificultades de los Estudiantes, resolución de Problemas. Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Puy, M. (1997). "La Solución de Problemas en Matemática". En: Pozo, M.et al. La solución de problemas. Aula XXI. Santillana. Madrid.

Santos, L. (1996). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Subcampos del pensamiento matemático

Azcárate, C y Deulofeu, J. (1996). "Funciones y Gráficas". Primera Reimpresión. Síntesis. Madrid.

Batanero, C. (2001). "Didáctica de la Estadística". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

Camargo, L.; Samper, C. y Leguizamón, C. (2002). "La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría". En: Revista EMA: Investigación e innovación en educación matemática. Vol. 7, Nº. 3. Bogotá.

Camargo, L. y Guzmán, A. 2004. "Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. relaciones entre pendiente y la razón de cambio", Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Godino, J. D. y Font, V.(2003). "Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros". Serie. Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Ver URL: http://www.webpersonal.net/vfont/ralgebraico.pdf

Malisani, E. (1999). "Los Obstáculos Epistemológicos en el Desarrollo del Pensamiento Algebráico". Visión Histórica. En: Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación Di Rosario. Argentina, Nel No. 13 del 1999, in lingua spagnola.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kuwer Academic Publishers. Holanda.

Segovia L. et al. (1999). "Estimación en Cálculo y Medida". Síntesis. Madrid.

Valdes, F. (1998). "Comprensión y Uso de la Estadística". Universidad Rómulo Gallegos. Ver en URL: http://www.cortland.edu/fl-teach/stats/stat-sp.html .

Referencias bibliográficas

Ackoff, L. y Sasieni, W. (1971). *Pesquisa Operacional*. LTC –Livros Técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas*. Una Empresa Docente. Bogotá.

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una Perspectiva* Cultural. Paidós. Barcelona.

Boulch (1981). *El Desarrollo Psicomotor desde el nacimiento hasta los 6 años. Consecuencias educativas*. Paidos. Barcelona.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2) pp. 33-115.

Bruner, J. (1990): *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza. Madrid.

Castaño, J. y Forero, A. (2006). "Construcción del Conocimiento Matemático Escolar. Algunos Aportes desde la Psicología en Saber, Sujeto y Sociedad. Una década de Investigación en Psicología". Universidad Javeriana. Bogotá.

Confrey, J. (1990). "A review of the research on student conceptions in Mathematics, Science, and Programming". Review of Research in Education, 16, 1, 3-55.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires.

Chevallard, Y.; Joshua, M.-A. (1982) "Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance", en: *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3, n° 2, p. 159-239.

D´Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática, Cooperativa Editorial, Magisterio Bogotá.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (2a. ed.). Peter Lang-Universidad del Valle. Cali. (Original francés publicado en 1995).

Ernest, P. (1991). *La Filosofía de la Educación Matemática*. The Falmer Press. London

Fernández, P. y Carretero, M. (1995). *Razonamiento y Comprensión*. Trotta. Madrid.

Freudenthal, H. (1967). *Mathematics Observed*. World University Library. London.

Freudenthal, H. (1987). *Mathematics Starting and Staying in Reality*. Proc. UCSMP, Int. Conf. on Math. Educ., 28-30 March 1985.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical Principles in Mathematics Instruction*. In: J.A. Barosso (Eds.), Aspects of Mathematics and its Applications, Elsevier Science Publishers. Amsterdam.

Gardner, H. (1994). *Estructuras de la Mente. La Teoría de las Inteligencias Múltiples*. Fondo de Cultura Económica. Bogotá

Gálvez, G. (2001). "La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental". En: Parra, C. e Saiz, I. (comps). Didáctica de matemáticas, Aportes y reflexiones. Capítulo VIII. Paidos. Buenos Aires.

Glaserfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A way of knowing and learning*. The Falmer Press. Washington, DC.

Gutierrez, A. y Jaime, A. (1990). "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría . El modelo de Van Hiele". En: Llinares, S. y Sánchez, V. Teoría y práctica en Educación Matemática. Alfar. Sevilla.

Guzmán, M. de, "Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, Studia Paedagogica". Revista de Ciencias de la Educación, 21 (1989),19-26.

Kuhn D. (1989) "Children and adults as intuitive scientists". Psychological Review 96(4):674-89.

Laborde (1996). "Visual phenomena in the teaching/learning of geometry ina a computer-based environment". En Mammana, C. y Villani, V. (eds.) *Proceedings 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Klumer Academic Publishers. London.

Lurcat l. (1979). *El niño y el espacio*. Fondo de Cultura Económica.

Mercer, N.(1997). *La Construcción Guiada del Conocimiento: El Habla de Profesores y Alumnos*. Paidos. Barcelona.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemática*. Bogotá.

Perkins, D. et al. (1994). *Enseñar a Pensar*. Paidós. Barcelona.

Piaget, J. (1972). *Psicología y Epistemología*. Emecé Editores. Buenos Aires.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. Tecnos. Madrid.

Pozo, J. et al. (1994). *La Solución de Problemas*. Aula XXI. Santillana. Madrid.

Puche R. (2001). *El niño que piensa*. Univ. del Valle, Univ. Federal Fluminense y Univ. De Buenos Aires. Cali. Colombia.

SED, (2006). *Colegios Públicos de Excelencia para Bogotá. Lineamientos generales para la transformación pedagógica de la escuela y la enseñanza, orientada a una educación de calidad integral*. SED. Bogotá.

Sierpinska, A. Y lerman, S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education*. En: A. J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Stubbs,M.(1987). *Análisis del Discurso*. Alianza. Madrid.

Vasco, C. et al. (1995). "La teoría General de Procesos y Sistemas. Una Propuesta Semiológica, Ontológica y Gnoseológica para la Ciencia, la Educación y el Desarrollo". En: Educación para el Desarrollo. Informe de Comisionados I. Tomo 2. Colección Documentos de la Misión Ciencia, Educación y Desarrollo. Bogotá, Presidencia de la República y Colciencias.

Vasco, C. (1984). Sistemas geométricos. "Un Nuevo enfoque para la didáctica de las Matemáticas. Volumen II. En: Serie Pedagogía y Currículo". Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Trillas. México, D. F.

Vergnaud, G. (1993). "La teoría de los campos conceptuales". En: Lecturas de didáctica de las matemáticas.Vol. 10. Nos.. 2-3. Traducción de Juan Díaz Godino

IMPRENTA
NACIONAL
DE COLOMBIA

www.imprenta.gov.co
PBX (0571) 457 80 00
Carrera 66 No. 24 - 09
Bogotá, D.C., Colombia